I.DŪMIŅŠ

ELEKTRĪBA UN MAGNĒTISMS

LEKCIJU KONSPEKTS

SATURS

Lekciju konspekts sastādīts atbilstoši RTU Enerģētikas un elektrotehnikas fakultātes studentu mācību plānam, kurā priekšmetam *Elektrība un magnētisms* (EuM) atvēlētas vien 24 lekciju stundas. Līdz ar to šeit nav iespējams aplūkot ne desmito daļu no tiem jautājumiem, kuri attiektos uz līdzīga nosaukuma mācību priekšmetu, ja tas šo nosaukumu būtu patiešām pelnījis. Autoram jāpaļaujas uz to, ka nepieciešamākos no šiem jautājumiem (piem., feromagnētismu, pusvadītāju fiziku un tehniku u.c.) aplūkos citos priekšmetos − fizikā, elektrotehnikas teorētiskajos pamatos un citur.

Jārēķinās arī ar to, ka priekšmetu EuM lasa 1.kursa otrajā semestrī vienlaicīgi ar integrālrēķinu nodaļu matemātikā. Tādēļ lektors ir spiests semestra sākumā pēc iespējas izvairīties no integrālrēķinu lietošanas (kaut gan tas ne vienmēr ir iespējams), atliekot elektromagnētiskā lauka vienādojumu integrālās formas izklāstu uz semestra vidu vai beigām. Kā rāda pieredze, tad 1.kursa studenti vieglāk uztver lauka teorijā lietojamās diferencēšanas operācijas, jo ar atvasināšanas darbībām jau ir pazīstami.

Neraugoties uz visai ierobežoto lekciju stundu skaitu, autors tomēr uzskata par lietderīgu veltīt zināmu laiku relativitātes teorijas pamatu izklāstam, jo no šīs teorijas izrietošo secinājumu izmantošana ievērojami atvieglo elektromagnētiskā lauka teorijas izklāstu. Tā, piemēram, Maksvela pirmo un otro vienādojumu, kurus tradicionāli pasniedz kā postulātus, iespējams matemātiski iegūt no elektriskā un magnētiskā lauka vektoru transformāciju formulām kustīgās koordinātu sistēmās. Līdzīgi tas ir arī ar Bio-Savara-Laplasa likumu un vēl citām sakarībām.

Literatūrai par relativitātes teoriju allaž piemīt (no mūsu viedokļa) viens no diviem trūkumiem − tā ir vai nu pārāk vienkārša, vai pārāk sarežģīta. Tas arī ir viens no iemesliem, kādēļ tapis šis mācību līdzeklis. Autors centies šeit dot tieši tik daudz, cik ir nepieciešams elektromagnētisma izklāstam, neskarot daudzus pašus par sevi visai interesantus relativitātes teorijas secinājumus, kurus tradicionāli aplūko teorētiskajā fizikā.

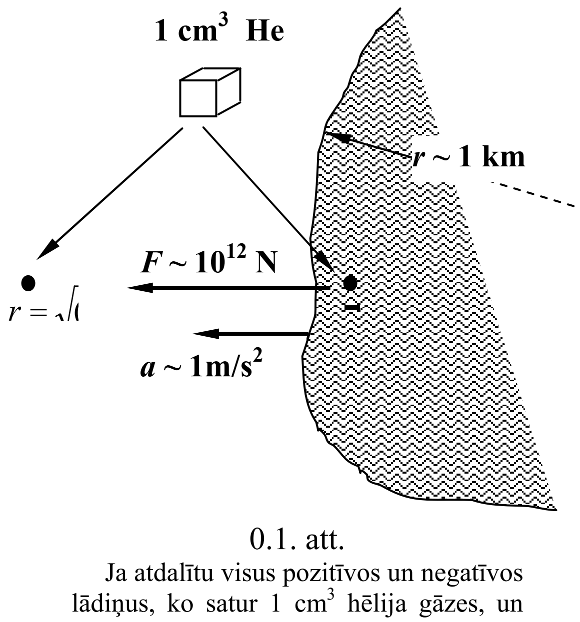
Saprotams, ka gandrīz katra lekciju konspektā skārtā jautājuma izklāstu varētu ievērojami paplašināt, taču autors ir apzināti centies nepārvērst šo konspektu par mācību grāmatu un iekļauties tajā apjomā, kas atbilst 24 lekciju stundām. Tāda varētu būt atbilde uz kritiku par to, ka šeit vispār nav skārti daudzi praksei ļoti svarīgi jautājumi. Savukārt students pēc EuM eksāmena nokārtošanas nedrīkstētu uzskatīt, ka viņš kļuvis par speciālistu elektrības un magnētisma jautājumos. Jāmācās būs vēl ļoti daudz!

IEVADS

0.1. Elektriskais lādiņš kā viena no vielas īpašībām

Cilvēks savā ikdienā sastopas ar apkārtējas vides, ķermeņu un vielu dažādām īpašībām. Ja mēs kādam jautāsim, kādu ķermeņu īpašību viņš uzskata par visbūtiskāko, tad droši vien viņš minēs ķermeņa masu. Ja jautāsim, kādi apkārtējās vides spēki, kas iedarbojas uz cilvēku, ir vissvarīgākie, tad, jādomā, tiks nosaukts gravitācijas spēks. Patiešām, zemes pievilkšanas spēku mēs tieši sajūtam savā ikdienā, mēs zinām, ka, zaudējuši atbalstu, varam nokrist no paaugstinājuma, zinām, ka, lai paceltu kādu ķermeni, vajadzīgs jo lielāks spēks, jo lielāka ir ķermeņa masa. Taču cilvēks un tāpat citas dzīvās būtnes un nedzīvie ķermeņi gluži labi var iztikt bez šī pievilkšanas spēka, nekas ļauns tiem nenotiek Bezsvara stāvoklī (piemēram, Zemes mākslīgajos pavadoņos) dzīvības procesi turpinās, cietie ķermeņi neizjūk, bet, piemēram, ūdens nesadalās savās sastāvdaļās par ūdeņradi un skābekli. Tas tā notiek tādēļ, ka bez masas vielai piemīt arī cita īpašība, ko mēs saucam par **elektrisko lādiņu**. Pateicoties tieši elektriskās mijiedarbības spēkiem, var veidoties ķīmisko elementu atomi, tie savukārt var apvienoties molekulās, bet tās - veidot cietus ķermeņus. Tāpēc elektriskais lādiņš jāuzskata par vielas daļiņu ne mazāk būtisku, bet varbūt vēl svarīgāku īpašību nekā masa.

Vielas daļiņām var būt divējāda veida lādiņš. Šos divus veidus nosacīti sauc par pozitīvo (+) un negatīvo (−) lādiņu. Daļiņas, kurām piemīt pretēju zīmju lādiņi, pievelkas līdzīgi kā gravitējoši ķermeņi, taču daļiņas ar vienādu zīmju lādiņiem atgrūžas. Ja kādai daļiņai vienādā daudzumā piemīt kā pozitīvais tā negatīvais lādiņš, mēs sakām, ka šī daļiņa ir elektriski neitrāla. Tieši šī iemesla dēļ − ka ķīmisko elementu atomi un to veidotās molekulas parastajos apstākļos ir neitrālas, cilvēks, kuram jautājām, par vielas svarīgāko īpašību uzskatīja masu. Viņš elektrisko lādiņu klātbūtni varbūt izjuta vienīgi kā sintētiska materiāla apģērba kaitinošu dzirksteļošanu un bija piemirsis, ka bez šīs vielas īpašības (lādiņa) nebūtu ne atomu, ne molekulu un tātad arī viņa paša. Taču elektriskie lādiņi ir katrā vielā. Tā, piemēram, var novērtēt, ka, ja mums izdotos atraut no 1 cm^3 hēlija gāzes atomu kodoliem visus elektronus un savākt punktveida lādiņos atsevišķi iegūtos pozitīvos un negatīvos lādiņus, tad, novietojot tos 1 m attālumā vienu no otra, tie pievilktos ar spēku ~10^{12} *N*. Ar šādu spēku varētu piešķirt paātrinājumu 1 m/s^2 akmenim, kura diametrs ir ~1 *km*! (0.1. att.) Cietas vielas 1 cm^3 satur vēl daudz vairāk lādiņa.



0.1. att.

Ja atdalītu visus pozitīvos un negatīvos lādiņus, ko satur 1 cm^3 hēlija gāzes, un izdotos tos sakopot atsevišķi aptuveni punktveida lādiņos, tad, novietoti 1 m attālumā viens no otra, tie pievilktos ar spēku, kāds varētu piešķirt paātrinājumu 1 m/s^2 akmenim (pareizāk − akmens klintij vai kalnam), kura rādiuss ir ~1 km.

Protams, ka šāds spriedums par milzīgā spēka iegūšanu ir tīri teorētisks: atraut elektronus no atomiem (jonizēt tos) gan ir iespējams, taču, lai pēc tam izveidotu aptuveni punktveida lādiņus, būtu jāpieliek tikpat milzīgs ārējs spēks, jo vienādas zīmes lādiņi atgrūžas. Tādēļ minēto milzīgo spēku nevar praktiski iegūt un izmantot.

Taču, kā redzēsim turpmāk, ar magnētisko parādību starpniecību var iegūt pavisam nelielu daļu no tā. Tomēr neliela, kaut vai simtmiljonā daļa no 10^{12} N jau ir desmit tūkstoši, tātad gluži vērā ņemams spēks, ar kuru var izkustināt no vietas, piemēram tramvaju vai trolejbusu.

Elektriskais lādiņš kā viens no vielas raksturlielumiem «ir pārāks» par otru raksturlielumu − masu − vēl arī citā ziņā. Relativitātes teorijā, kad jārīkojas ar lieliem ķermeņu kustības ātrumiem, var parādīt, ka ķermeņa masa vispār zaudē savu jēgu gan kā inerces gan kā gravitācijas mijiedarbības mērs, jo spēka izraisītais ķermeņa paātrinājums vispārīgā gadījumā nemaz nav paralēls šim spēkam. Līdz ar to masu vairs nevar definēt kā spēka un paātrinājuma attiecību. Līdzīgi tas notiek arī ar gravitācijas mijiedarbību. Tāpēc, stingri ņemot, nevar runāt arī par masas nezūdamības likumu. Turpretim attiecībā uz elektrisko lādiņu dabā nav zināmi nekādi procesi, kuros šis lādiņš varētu izzust. Ja kādā telpas apgabalā lādiņi (t.i. vielas daļiņas, kurām piemīt šis raksturlielums) nevar ne iekļūt ne izkļūt, tad šajā apgabalā ietvertais summārais lādiņš nemainās neatkarīgi no tā, kādiem procesiem tiek pakļauta apgabalā ietvertā viela. Pozitīvie un negatīvie lādiņi var gan savstarpēji kompensēties vai, otrādi - tikt atrauti viens no otra, taču to summa paliek nemainīga. Elektrisko **lādiņu nezūdamības likums** ir viens no vispārīgākajiem dabas likumiem. Lādiņš nemainās arī visdažādāko koordinātu transformāciju rezultātā; saka, ka tas ir **invariants** attiecībā pret koordinātu transformācijām. Tāpēc, piemēram, elektrona lādiņu $-1{,}602.10^{-19}$ C var uzskatīt par fundamentālu dabas konstanti, kas nemainās nekādos apstākļos.

Rezumējot, varam teikt, ka elektriskais lādiņš līdzīgi masai ir vielas daļiņu ļoti svarīga īpašība, un attiecībā uz šo īpašību dabā ir zināmas trīs veidu elementārdaļiņas: tādas, kam piemīt pozitīvs vai negatīvs lādiņš, un tādas, kam lādiņa nav, kas ir elektriski neitrālas. Atomi, molekulas, ķermeņi veidojas tieši elektriskās mijiedarbības rezultātā, un reālajos ķermeņos, kas ārēji ir elektriski neitrāli, ietvertais lādiņa daudzums var būt visai liels.

0.2. Elektrisko parādību izmantošana cilvēka praktiskajā darbībā

Dabā eksistējošos spēkus un parādības cilvēks arvien ir centies izmantot savām vajadzībām. Tā, piemēram, izmantojot ūdens kritumu, mēs izmantojam kinētisko enerģiju, kas rodas, atbrīvojoties tās ūdens masas gravitācijas potenciālajai enerģijai, kura atrodas augstāk virs Zemes virsmas. Protams, šī gravitācijas enerģija varēja rasties tikai, pateicoties saules starojumam, kas iztvaicēja ūdeni no jūrām un okeāniem, bet lietus nolija ne tikai atpakaļ jūrā, bet arī augstienēs, t.i., tas nepaspēja atdot visu attiecībā pret Zemes gravitāciju uzkrāto potenciālo enerģiju. Līdz ar to augstāk virs jūras līmeņa uzkrājušos ūdeni var uzskatīt par milzīgu gravitācijas enerģijas akumulatoru, kuru iespējams izmantot. Bet vai šādi milzīgi akumulatori eksistē arī elektriskajai (jeb, kā biežāk saka − elektromagnētiskajai) enerģijai? Uz šo jautājumu ir grūti viennozīmīgi atbildēt. Stingri ņemot, būtu jāatbild ar «jā». Mēs jau zinām, ka par molekulu veidošanos «atbildīgi» ir elektriskie spēki. Tāpēc jebkurā ķīmiskā reakcijā, kurā notiek molekulu (vielu) pārveidošanās, tajā skaitā sadegšanas procesā atbrīvojusies enerģija būtu uzskatāma par elektriskajās parādībās uzkrāto un tagad atbrīvoto enerģiju. Līdz ar to jebkura veida kurināmais būtu uzskatāms par šādu elektriskās enerģijas akumulatoru. Taču ikdienā mēs neesam paraduši degšanu, kuru pavada dūmgāzu un dažādu kaitīgu sadegšanas produktu rašanās, tieši saistīt ar elektroenerģiju, kura ienāk mūsu dzīvokļos vai ražošanas objektos tīra un klusa bez kaitīgiem piejaukumiem vai ūdenskrituma trokšņa. Parasti saka, ka kurināmajā ir uzkrāta «ķīmiskā enerģija» (tīrā fizika gan šāda enerģijas veida eksistenci neatzīst). Ja paliekam pie šāda vispārpieņemta uzskata, tad uz uzdoto jautājumu jāatbild ar «nē» − nekādi milzīgi elektriskās enerģijas akumulatori uz zemes neveidojas. «Tīro» elektrisko enerģiju var uzkrāt vienīgi kondensatora elektriskajā vai spoles magnētiskajā laukā, bet tur to var «uzglabāt» ļoti neilgu laiku un tās daudzums nevar būt sevišķi liels. Nekādu milzīgu dabisku kondensatoru, kas uzlādētos saules enerģijas ietekmē un kuros uzkrāto enerģiju varētu praktiski izmantot, uz zemes nav. (Atmosfēras dažādi slāņi gan uzlādējas un negaisa laikā notiek to izlāde zibens veidā, taču atmosfēras elektriskās parādības cilvēki vēl nav iemācījušies izmantot.)

Tad kāpēc tomēr elektromagnētisko parādību izmantošanai ir tik liela nozīme cilvēka praktiskajā darbībā? Elektromagnētisko parādību plašā izmantošana izskaidrojama tā, ka ar to palīdzību ir viegli:

1) pārveidot, pārvadīt un sadalīt patērētājiem **enerģiju**;
2) pārveidot, pārvadīt, sadalīt un glabāt **informāciju**.

Elektromagnētiskās parādības mēs neizmantojam tieši kā enerģijas avotu, bet gan citu avotu enerģiju vispirms pārveidojam elektriskajā (hidroelektrostacijās (HES), termoelektrostacijās (TES), atomelektrostacijās (AES) u.c.). Ar vadu palīdzību pārveidoto enerģiju ir viegli pārvadīt lielos attālumos un pievadīt katram patērētājam (dzīvoklim, katrai darbmašīnai rūpnīcā, katram elektriskā transporta līdzeklim u. taml.) Šāda enerģijas pārvade un sadale praktiski nebūtu iespējama, izmantojot citu enerģijas veidu, piemēram, mehānisko ar vārpstu vai siksnas pārvadu palīdzību. Patērētāji saņemto enerģiju atkal pārveido tajos veidos, kādi viņiem vajadzīgi − mehāniskajā enerģijā, siltumā vai kādā citā veidā.

Teiktais attiecas arī uz informāciju; lai to pārvadītu un apstrādātu, parasti ir lietderīgi to vispirms pārveidot elektriskajos signālos. Elektromagnētiskie viļņi izplatās ar gaismas ātrumu, t.i. zemes mērogos šādi pārveidota informācija pārvadāma praktiski momentāni. Kā mēs labi zinām, šādi var pārraidīt gan skaņu, gan attēlu. Tāpat arī automātiskās vadības sistēmās informāciju par regulējamo lielumu pārveido elektriskajos signālos, kuri pēc tam iedarbojas uz atbilstošajiem izpildorgāniem. (Slaveno Vata centrbēdzes regulatoru mašīnas griešanās ātruma regulēšanai šodien praktiski vairs nelieto. Tā vietā izmanto t.s. tahoģenerātoru - nelielu elektrisko ģeneratoru, kura radītais spriegums ir proporcionāls griešanās ātrumam.) Taču elektromagnētiskās parādības izmanto ne tikai jau esošās informācijas apstrādei, bet arī jaunas informācijas iegūšanai. Tā piemēram, ar datoru atrisinot kādu uzdevumu, mēs iegūstam informāciju, kura iepriekš nebija zināma, bet dators darbojas galvenokārt ar elektrisko signālu palīdzību. Kā jau minējām, tad lielu «tīrās» elektriskās enerģijas daudzumu uzglabāšana diemžēl nav iespējama (vismaz pagaidām − nē). Taču informāciju iespējams arī glabāt − datora atmiņā, vai ārējās atmiņas iekārtās (piemēram, kompaktdiskos). Šādi glabāto informāciju ir viegli atrast un apstrādāt. Tieši tāpēc tik plaši izmanto visdažādākās *datu bāzes* − datorā ievadītu informāciju par kādu noteiktu jautājumu. Tā var glabāt bibliotēkas katalogu, ziņas par noliktavā esošajām precēm un daudz ko citu. Ar globālo tīklu palīdzību («Internet» u.c.) mēs varam piekļūt informācijai, kas glabājas pavisam citā pasaules malā. Arī šīs informācijas pārraide notiek ar elektrisko signālu palīdzību.

Kā izriet no visa šeit teiktā, tad bez elektromagnētisko parādību izmantošanas šodien nav iedomājama pilnīgi neviena cilvēka darbības nozare. Tāpēc ar šo parādību būtību jābūt pazīstamam ikvienam un vēl jo vairāk cilvēkam, kura darbs saistīts ar kādu zinātnes vai tehnikas nozari. Elektriskās un magnētiskās parādības jau ir īsi aplūkotas fizikas kursā. Mūsu disciplīna kalpo šo zināšanu padziļināšanai.

1. Elektriskais lauks.

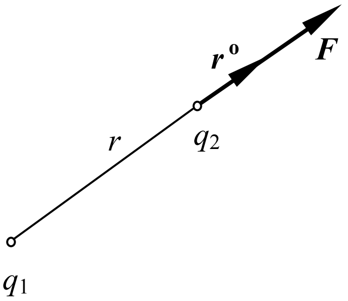
1.1. Kulona likums. Elektriskā lauka intensitāte.

Elektrisko parādību pētīšanu sāksim tāpat kā tas noticis vēsturiski − ar punktveida lādiņu mijiedarbības spēka izteiksmi, t.i. − ar lasītājam katrā ziņā jau pazīstamo *Kulona likumu*, kas elektriskās parādības saista ar cilvēkam pazīstamākām mehāniskajām parādībām. Šis eksperimentāli konstatētais likums nosaka, ka **divu punktveida lādiņu savstarpējās iedarbības spēks ir tieši proporcionāls lādiņu reizinājumam, bet apgriezti proporcionāls attāluma kvadrātam starp lādiņiem**. Vienādas zīmes lādiņi atgrūžas viens no otra, bet pretējo zīmju lādiņi − pievelkas. Apzīmējot lādiņu lielumus ar q_1 un q_2, attālumu starp tiem ar r, bet spēku ar $\boldsymbol{F}$, Kulona likums vektoriālā formā rakstāms šādi (vakuumā un tuvināti arī gaisā):

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}} \qquad (1.1)$$

(Šeit un turpmāk vektoriālie lielumi iespiesti «treknajā» rakstā, kā tas vispār pieņemts zinātniskajā literatūrā).

Koeficients $4\pi\varepsilon_{\mathrm{o}}$ Kulona likumā vajadzīgs mērvienību saskaņošanai. Ja Kulona likuma izteiksmē (1.1) lādiņu lielumus ievieto kulonos (C), bet attālumu − metros, tad, lai iegūtu spēku ņūtonos, jālieto vērtība $\varepsilon_{\mathrm{o}}=1/(4\pi\cdot 9\cdot 10^9)=8{,}84.10^{-12}$ *F/m* (*faradi* uz *m*). Konstanti ε_{o} sauc par elektrisko konstanti un tai ir svarīga loma visos elektriskajos procesos. Vienības vektors $\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$, kurš nosaka spēka $\boldsymbol{F}$ virzienu, ir paralēls attālumam r, kas savieno lādiņus (1.1.att.), bet tā vērsums atkarīgs no tā, uz kuru lādiņu darbojošos spēku gribam noteikt. Ja meklējam spēku, ar kādu q_1 iedarbojas uz q_2, tad $\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ ir vērsts virzienā no q_1 uz q_2.



1.1. att. Spēks $\boldsymbol{F}$, ar kādu punktveida lādiņš (q_1) iedarbojas uz otru lādiņu (q_2), ir vērsts taisnes r virzienā, kura savieno lādiņus. Ja lādiņu zīmes ir vienādas, tas ir atgrūšanās spēks.

Izteiksme (1.1) ietver arī to, ka vienādas zīmes lādiņi atgrūžas, bet pretējo – pievelkas. Ja abu lādiņu zīmes ir vienādas, tad reizinājums q_1q_2 ir pozitīvs, un lādiņš q_2 tiek atgrūsts no q_1 vektora $\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ virzienā. Ja, turpretim, lādiņu zīmes ir dažādas, tad reizinājums q_1q_2 ir negatīvs, un spēka virziens būs pretējs $\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ virzienam, q_2 tiks pievilkts pie q_1. Tikpat liels, bet pretēji vērsts spēks darbojas uz q_1, jo, nosakot šo spēku, vienības vektors $\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ jāvērš virzienā no q_2 uz q_1.

Savu likumu franču zinātnieks Š.Kulons formulēja jau 1785.g. un tas bija viena no pirmajām matemātiski formulētajām sakarībām attiecībā uz elektriskajām parādībām. Vēlāk šis likums pārbaudīts un apstiprināts daudzkārt. Kaut arī praktiski ar atsevišķiem punktveida lādiņiem nav jānodarbojas visai bieži, Kulona likumam ir svarīga teorētiska nozīme, jo no tā (izmantojot vēl dažus citus eksperimentāli apstiprinātus faktus) var iegūt gandrīz visu elektromagnētisma teoriju.

Kulona likums neizskaidro, kā lādiņi, kas atrodas viens no otra kādā attālumā, spēj iedarboties viens uz otru. Pēc mūsdienu priekšstatiem šāda iedarbība bez starpnieka nav iespējama. Tādēļ mēs sakām, ka viens lādiņš savā apkārtnē rada īpašu vides stāvokli − **elektrisko lauku** − kurā ievietots otrs lādiņš izjūt mehānisku iedarbību (līdzīgi kā šķidrumā iegremdēts par to vieglāks ķermenis izjūt ārā grūdēju spēku). Tā kā elektriskā lauka jēdzienu lieto, lai izskaidrotu lādiņu mehānisko mijiedarbību, tad viens no galvenajiem šo lauku raksturojošiem lielumiem ir **spēks, ar**

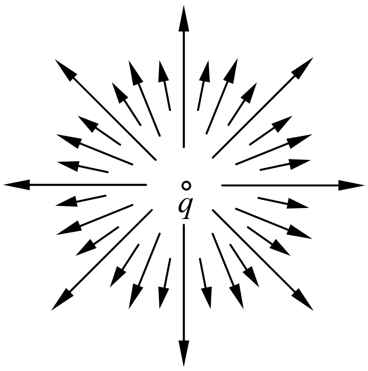
kādu lauks iedarbotos uz vienu vienību lielu pozitīvu punktveida lādiņu, ja tas atrastos laukā. Šo spēku sauc par **elektriskā lauka intensitāti** un apzīmē ar ***E*.**

Lasītāja uzmanība jāpievērš darbības vārdu nosacījuma izteiksmei lauka intensitātes definīcijā: «*iedarbotos* ... uz lādiņu, ja tas *atrastos* laukā». Ar to tiek uzsvērta lauka fiziskā realitāte − viena lādiņa lauks pastāv neatkarīgi no tā, vai ir kāds cits elektriskais lādiņš, uz kuru šis lauks iedarbojas atbilstoši Kulona likumam, vai nav. Lauka jēdzienu elektrotehnikā ieviesa angļu fiziķi Faradejs un Maksvels 19.gs.

Elektriskā lauka intensitāte, tāpat kā spēks, ir vektoriāls lielums. Tās vienība atbilstoši definīcijai ir N/C (*ņūtons* uz *kulonu*). Tā kā spēks izsakāms kā enerģijas (darba) dalījums ar attālumu, tad 1 N = 1 W·s/m = 1 V·A·s/m. savukārt 1 C = 1 A·s. Tātad 1 *N/C* = 1 *V/m*. Elektrotehnikā lieto tieši šo elektriskā lauka intensitātes vienības nosaukumu V/m (*volts* uz *metru*).

Noskaidrosim, kādu elektriskā lauka intensitāti rada punktveida lādiņš q. To var iegūt tieši no Kulona likuma, liekot tajā $q_1 = q$ un ievērojot intensitātes definīciju $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}/q_2$:

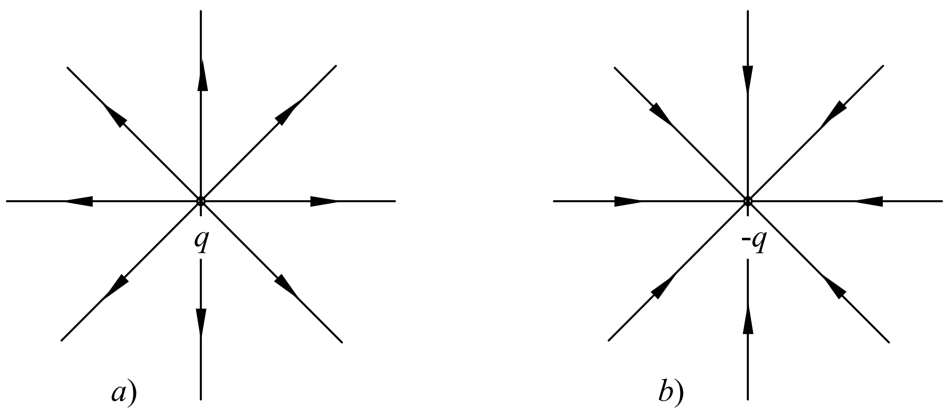
$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}} . \qquad (1.2)$$



1.2. att. Pozitīva punktveida lādiņa radītā elektriskā lauka intensitāte jebkurā telpas punktā ir vērsta radiāli projām no lādiņa − tā kā tiktu atgrūsts cits pozitīvs lādiņš. Attālumam no lādiņa palielinoties divas reizes, vektora ***E*** lielums samazinās četras reizes.

Kā redzams, tad pozitīva lādiņa radītā lauka intensitāte jebkurā telpas punktā ir vērsta radiāli projām no lādiņa − tā kā tas atgrūstu otru pozitīvu lādiņu (1.2. att.). Intensitātes lielums samazinās apgriezti proporcionāli attāluma r kvadrātam no lādiņa q. Punktos, kuri atrodas vienādā attālumā no lādiņa (t.i., uz sfēras virsmas, kuras centā atrodas q) E lielumi ir savā starpā vienādi.

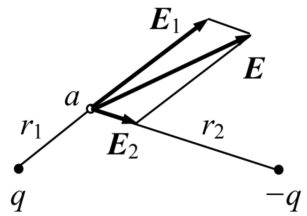
Līniju, kuras pieskares virziens katrā vektoru lauka punktā sakrīt ar vektora virzienu, sauc par *spēka līniju*. Pozitīva punktveida lādiņa radītā elektriskā lauka spēka līnijas ir radiāli stari, kas iziet no lādiņa (1.3. att. *a*). Negatīvs lādiņš pievilktu otru pozitīvu lādiņu. Tātad šajā gadījumā lauka intensitāte ***E*** ir vērsta radiāli virzienā uz negatīvo lādiņu. Spēka līnijas tāpat ir radiāli stari (1.3. att. *b*) tikai to virziens ir pretējs 1.3. attēlā *a* parādītajam. Var teikt, ka vektora ***E*** spēka līnijas «izplūst» no pozitīva lādiņa un «ieplūst» negatīvajā.



1.3. att. Punktveida lādiņa elektriskā lauka intensitātes spēka līnijas ir radiāli stari, kas sākas pozitīvajā, bet beidzas − negatīvajā lādiņā.

Elektriskā lauka intensitātes svarīga īpašība ir tās pakļaušanās *superpozīcijas principam,* t.i., ka vairāku lādiņu radīto kopējo lauka intensitāti var iegūt, vektoriāli skaitot vektorus $\boldsymbol{E}_1$**,** $\boldsymbol{E}_2$ utt., ko apskatāmajā telpas punktā radītu katrs lādiņš atsevišķi:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \ldots \ .$$



Superpozīcijas principa pareizība attiecībā uz elektriskā lauka intensitāti ir konstatēta eksperimentāli. Tas, ka elektriskajam laukam piemīt šī īpašība, norāda, ka viena lādiņa lauks citu lādiņu laukus tieši neietekmē. Iedarbība var notikt tikai, pārvietojot pašus lādiņus.

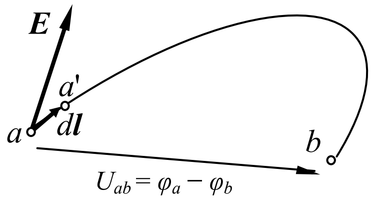
Piemēram, aplūkosim gadījumu, kad elektrisko lauku telpā rada divi punktveida lādiņi q un $-q$ (1.4. att.). Jānosaka lauka intensitāte punktā a, kas atrodas attālumā r_1 no pozitīvā lādiņa un attālumā r_2 − no negatīvā, turklāt $r_2 = 2r_1$. Pozitīvā lādiņa q radītā laika intensitāte p. a $\boldsymbol{E}_1$ vērsta radiāli projām no lādiņa, bet negatīvā $(-q)$ − virzienā uz to. Vektoru garumus E_1 un E_2 var iegūt no izteiksmes (1.2). Vektoriāli summējot $\boldsymbol{E}_1$ un $\boldsymbol{E}_2$, iegūst $\boldsymbol{E}$. Arī tādā gadījumā, kad q lielums nav dots, iespējams pareizi noteikt rezultējošās lauka intensitātes $\boldsymbol{E}$ virzienu. Ievērojot, ka $r_2 = 2r_1$, no (1.2) var iegūt attiecību $E_1/E_2 = 4$. Atliekot jebkurā mērogā E_1 garumu 4 reizes lielāku par E_2, iegūstam pareizo $\boldsymbol{E}$ virzienu.

Elektromagnētisma teorijā zināmas grūtības rada tas, ka, tuvojoties punktveida lādiņam, elektriskā lauka intensitāte atbilstoši Kulona likumam (1.1) neierobežoti pieaug ($r \to 0$). Lai pareizāk ievērotu lādētu daļiņu mijiedarbību ļoti tuvā, ar atomārajiem izmēriem salīdzināmā attālumā, jāatsakās no punktveida lādiņa jēdziena un jāievēro lādiņa sadalījums daļiņā, kaut arī informācija par šo sadalījumu var būt ierobežota. Var parādīt, ka, lādiņiem tuvojoties, vispirms rodas t.s. Van-der-Vālsa spēki, kas daļiņu pievilkšanos vēl pastiprina. Šie spēki ir atkarīgi ne tikai no lādiņu lielumiem, bet arī no konkrētās vielas, kuras daļiņas tiek aplūkotas. Taču, ja attālums samazinoties sasniedz konkrētās daļiņas t.s. Van-der-Vālsa rādiusu, tad starp daļiņām rodas atgrūšanās spēki neatkarīgi no lādiņu zīmes. Šie spēki jau ir *kvantu mehānikas* parādību izpausme un klasiskās elektromagnētisma teorijas ietvaros nav aplūkojami. Atomi un molekulas veidojas minēto pievilkšanās un atgrūšanās spēku mijiedarbībā. Ar tiem jārēķinās, pētot parādības molekulāros un atomāros attālumos, piemēram, fizikālajā ķīmijā, molekulārajā bioloģijā un citur.

1.2. Elektriskais potenciāls.

Bez elektriskā lauka intensitātes − vektora $\boldsymbol{E}$ − elektrisko lauku var raksturot arī ar skalāru lielumu − potenciālu φ. **Potenciāls $\boldsymbol{\varphi}$** kādā lauka punktā **ir vienāds ar darbu, kādu veiktu lauka spēki, pārvietojot vienu vienību lielu pozitīvu punktveida lādiņu no apskatāmā punkta līdz punktam, kurā potenciāls pieņemts vienāds ar nulli.** Kā redzams, tad potenciāls tiek definēts ar precizitāti līdz patvaļīgai konstantei, kuras vērtība atkarīga no tā, kur φ pieņemts vienāds ar nulli. Bieži par punktu ar nulles potenciālu izvēlas bezgalīgi tālu punktu, taču tehnikā nereti to ir izdevīgi izvēlēties citur. Tāpēc, runājot par potenciālu, vienmēr jābūt skaidri zināmam, attiecībā pret kuru punktu tas noteikts.

Atradīsim potenciāla φ sakaru ar elektriskā lauka intensitāti $\boldsymbol{E}$. Pārvietojot vienu vienību lielu pozitīvu punktveida lādiņu no punkta a uz a' attālumā dl (1.5. att.), lauka spēku veiktais elementārais darbs ir $dA = \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$, jo darbs, kā zināms, ir nosakāms kā spēka un ceļa vektoru skalārais reizinājums, bet spēks, kāds darbojas uz apskatāmo vienības lādiņu, pēc definīcijas ir $\boldsymbol{E}$. Potenciāla izmaiņa, pārejot no a uz a' ir vienāda ar $-dA$, jo atlicis mazāk darba, kas jāveic, līdz būs sasniegts punkts ar nulles potenciālu. Tātad



1.5. att. Potenciāla maiņa no punkta uz punktu iegūstama saskaitot (integrējot) elementāros darbus dA. Divu punktu potenciālu starpību sauc par spriegumu starp šiem punktiem.

$$\varphi_{a'} = \varphi_a - \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}.$$

Lai izteiktu punkta b potenciālu φ_b, jāsummē visi elementārie darbi dA līnijas posmā ab. Ja lauka intensitāte $\boldsymbol{E}$ katrā šīs līnijas punktā ir zināma, praktiskos aprēķinos dl aizvieto ar iespējami mazu līknes posmu Δl. Tad

$$\varphi_b \approx \varphi_a - \sum \boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{l}. \qquad (1.3)$$

Izmantojot datoru, šāds aprēķins nesagādā nekādas grūtības arī tad, ja saskaitāmo skaits summā sasniedz simtus un tūkstošus. Samazinot Δl, iespējams sasniegt jebkuru vēlamo aprēķina precizitāti.

Summas robežu, kad $\Delta l \to 0$, matemātikā sauc par *integrāli* (šajā gadījumā par *līnijas integrāli*). Lietojot attiecīgo integrāļa apzīmējumu, iepriekšējā izteiksmē aptuvenās vienādības zīmi aizvieto ar precīzo, iegūstot izteiksmi

$$\varphi_b = \varphi_a - \int_a^b \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}\,. \qquad (1.4)$$

Ja $\boldsymbol{E}$ vektora atkarība no punkta vietas uz līnijas ab aprakstāma ar samērā vienkāršu matemātisku funkciju, iespējams iegūt arī integrāļa analītisko izteiksmi.

Vairumā praksē sastopamo gadījumu tomēr jālieto izteiksme (1.3).

Divu punktu potenciālu starpību sauc par **spriegumu** starp šiem punktiem. Spriegumu apzīmēsim ar burtu U un diviem indeksiem, kuru secība norāda, kura punkta potenciāls starpībā ir mazināmais, bet kura − mazinātājs. Tā, piemēram, $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$, bet $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a$. Kā redzams, tad saskaņā ar (1.4)

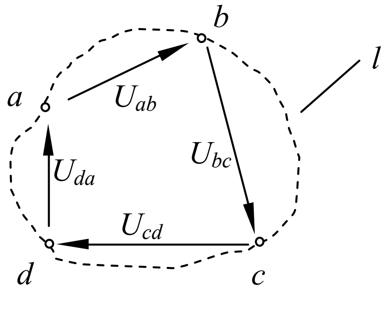
$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}\,. \qquad (1.5)$$

Spriegums starp diviem punktiem nav atkarīgs no nulles potenciāla izvēles. Sprieguma esamību starp punktiem elektriskajās shēmās parāda ar bultiņu, kuras smaile vērsta no pirmā indeksa (punkta) uz otro (1.5. att.). Potenciālu un spriegumu mēra voltos (V).

Svarīga nekustīgu un laikā nemainīgu lādiņu elektriskā lauka (*elektrostatiskā lauka*) intensitātes īpašība ir tas, ka integrālis (1.5) nav atkarīgs no integrēšanas ceļa, bet tikai no tā galapunktiem. Tātad, integrējot pa noslēgtu ceļu, jāiegūst 0, t.i., elektrostatiskajā laukā

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = 0\,. \qquad (1.6)$$

(Aplis uz līnijas integrāļa matemātikā nozīmē integrēšanu pa noslēgtu ceļu.)



1.6. att. Spriegumu algebriska summa noslēgtā kontūrā ir vienāda ar 0.

No izteiksmes (1.6) izriet elektrisko ķēžu teorijā ļoti svarīgais Kirhofa otrais likums: *noslēgtā kontūrā spriegumu summa ir vienāda ar nulli.* 1.6. attēlā parādīta noslēgta līnija l un punkti a,b,c,d uz tās. Integrēšanu (summēšanu) pa noslēgto līniju var sadalīt daļās no a līdz b, no b līdz c utt. Katrs no šiem integrāļiem ir vienāds ar attiecīgo spriegumu, tātad $U_{ab}+U_{bc}+U_{cd}+U_{da} = 0$ jeb

$$\sum U = 0.$$

Vispārīgā gadījumā šī summa jāsaprot algebriskā nozīmē, jo jebkura sprieguma vietā varētu likt pretējā virziena spriegumu, bet, apmainot vietām sprieguma indeksus, mainās arī sprieguma skaitliskās vērtības zīme (piemēram, $\varphi_a - \varphi_b$ vietā rodas $\varphi_b - \varphi_a$).

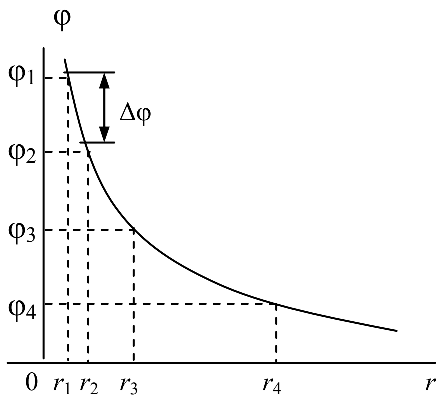
Punktveida lādiņa potenciāls. Lai ilustrētu izklāstīto atradīsim punktveida lādiņa potenciālu attiecībā pret bezgalīgi tālu punktu. Izmantojot (1.5), kādam punktam, kurš atrodas attālumā a no lādiņa, var rakstīt

$\varphi = \varphi_a = \int_a^\infty \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$. Integrēšanu var izdarīt pa jebkuru ceļu no punkta a līdz ∞, taču visizdevīgāk, protams, ir izvēlēties radiālu virzienu, liekot $d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{r}$. Tā kā punktveida lādiņa elektriskā lauka intensitāte arī ir vērsta radiālā virzienā, tad visā izvēlētajā integrēšanas ceļā vektors $\boldsymbol{E}$ ir paralēls $d\boldsymbol{r}$ un $\boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = Edr$ − skalārais reizinājums ir vienāds ar vektoru moduļu reizinājumu. E moduli iegūstam no (1.2) atmetot vienības vektoru. Konstantos lielumus var iznest ārpus integrāļa. Tad

$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. (Šis rezultāts iegūstams, izmantojot visparastākos integrēšanas paņēmienus.) Tā kā attālumu līdz lādiņam parasti apzīmē ar r, tad turpmāk punktveida lādiņa potenciālu (attiecībā pret bezgalīgi tālu punktu) noteiksim no izteiksmes

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.7}$$

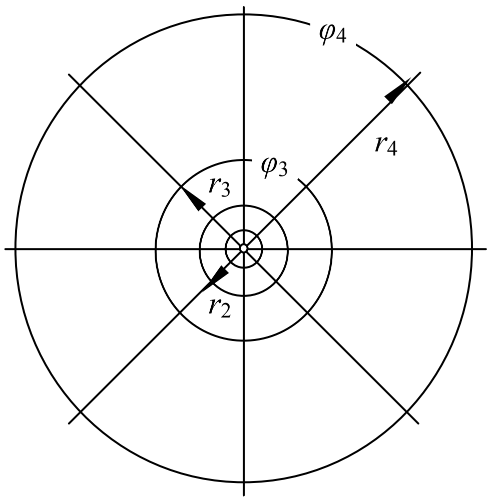
Kā redzams no (1.7), tad φ mainās apgriezti proporcionāli attālumam no lādiņa r. Attālinoties no lādiņa potenciāls samazinās un tiecas uz nulli, bet, tuvojoties tam, neierobežoti pieaug (tāpat kā punktveida lādiņa lauka intensitāte, par ko jau runājām iepriekšējās sadaļas noslēgumā). Potenciāla maiņa atkarībā no r parādīta 1.7. attēlā.



1.7. att. Punktveida lādiņa potenciāla maiņa atkarībā no attāluma līdz lādiņam. Potenciālam samazinoties ar vienādu soli $\Delta\varphi$, ekvipotenciāļu radiusi pieaug lēnāk tur, kur potenciāla maiņa ir visstraujākā.

Virsmu, kuras visiem punktiem ir vienāds potenciāls, sauc par ekvipotenciālu virsmu, bet tās šķēlumu ar kādu citu virsmu, parasti − ar zīmējuma plakni, − par ekvipotenciālo līniju jeb **ekvipotenciāli**. No (1.7) var secināt, ka punktveida lādiņa laukā $\varphi = \text{const}$, ja $r = \text{const}$. Tātad šajā laukā ekvipotenciālās virsmas ir lādiņam koncentriskas sfēras, bet ekvipotenciāles lādiņa plaknē ir lādiņam koncentriski riņķi. 1.8. attēlā parādītas ekvipotenciāles, atbilstošas potenciāla vērtībām φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 no 1.7. attēla, kuras atšķiras cita no citas par vienādu lielumu $\Delta\varphi$. Redzams, ka tādā gadījumā ekvipotenciāles novietojas tuvāk cita citai apgabalā, kur potenciāla maiņa ir straujāka, bet tālāk viena no otras tur, kur φ maiņa kļūst lēnāka.

1.8. attēlā parādītas arī spēka līnijas no 1.6. attēla. Var ievērot, ka ekvipotenciālo un spēka līniju krustpunktos šo līniju pieskares ir savstarpēji perpendikulāras (taisno spēka līniju pieskares sakrīt ar pašām līnijām). Šādas līkņu saimes sauc par savstarpēji *ortogonālām*, un šī īpašība saglabājas jebkurā elektrostatiskā laukā. Tādēļ, zinot vienu no līkņu saimēm, vismaz aptuveni var iegūt arī otru.



1.8. att. Punktveida lādiņa elektriskā lauka aina. Ik pēc vienāda potenciāla intervāla zīmētas ekvipotenciāles atrodas tuvāk cita citai apgabalā, kur potenciāla maiņa ir straujāka un attiecīgi lielāka ir elektriskā lauka intensitāte E. Ekvipotenciāles un spēka līnijas ir savstarpēji ortogonālas līkņu saimes.

Jau ievērojām, ka ik pēc vienāda potenciāla pieauguma $\Delta\varphi$ (vai samazinājuma) zīmētas ekvipotenciāles atrodas tuvāk cita citai apgabalā, kur potenciāls mainās straujāk (līdzīgi kā līmeņa līnijas kartēs), mūsu gadījumā − lādiņa tuvumā, t.i., tur, kur lauka intensitāte ir lielāka. Arī šī īpašība saglabājas jebkura elektrostatiskā lauka ainā.

Lauka intensitātes sakars ar potenciālu. Viena no sakarībām, kas saista šos lielumus, ir (1.5) izteiksme. No tās var noteikt potenciālu vai potenciālu starpību, ja zināma intensitātes $\boldsymbol{E}$ maiņa telpā. Taču ne mazāk svarīga ir apvērstā sakarība, kas atļauj noteikt $\boldsymbol{E}$, ja zināms ir potenciāls.

Iegūstot (1.5), jau rakstījām, ka potenciāla pieaugums elementārā pārvietojumā $d\boldsymbol{l}$ ir $d\varphi = -\boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$. Ja pārvietojums notiek x-ass virzienā, jāievēro tikai vektora $\boldsymbol{E}$ komponente E_x: $d\varphi = -E_x dx$. Līdzīgi var uzrakstīt potenciāla pieaugumus, ja pārvietojums notiek y un z-ass virzienā. Tātad vektora $\boldsymbol{E}$ komponentes Dekarta koordinātu sistēmā nosakāmas šādi: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$; $E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$; $E_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$.

(Šeit jālieto parciālie atvasinājumi, jo vispārīgā gadījumā φ ir visu koordinātu funkcija.) Vektoriālā formā:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{o}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \boldsymbol{y}^{\mathrm{o}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{o}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1.8)$$

Saīsināti to raksta šādi:

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi \quad \text{jeb} \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \qquad (1.9)$$

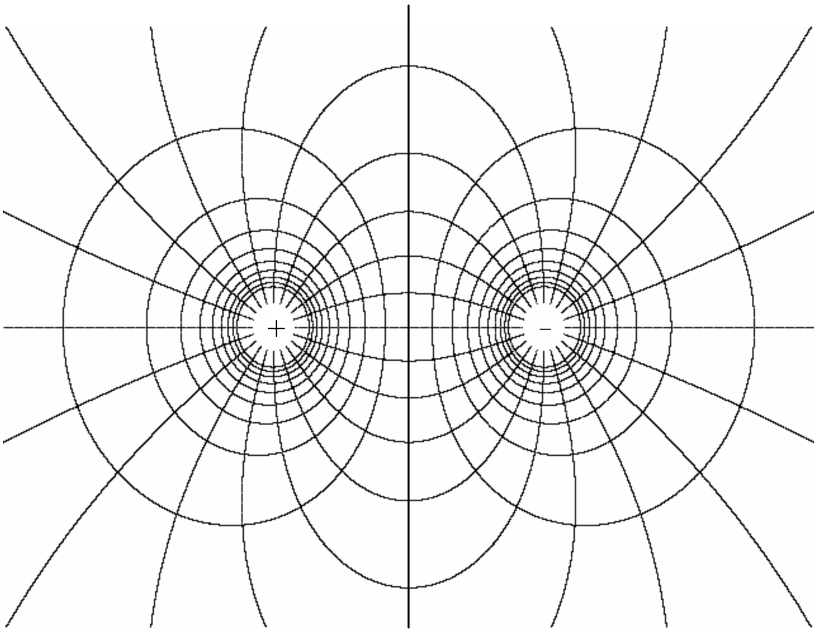
kur grad (*gradients*) norāda (1.8) izteiksmē vajadzīgo atvasināšanu, bet ar operatoru ∇ (*nabla*) saprot simbolisku vektoru

$$\nabla = \boldsymbol{x}^{\mathrm{o}}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{o}}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{z}^{\mathrm{o}}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1.10)$$

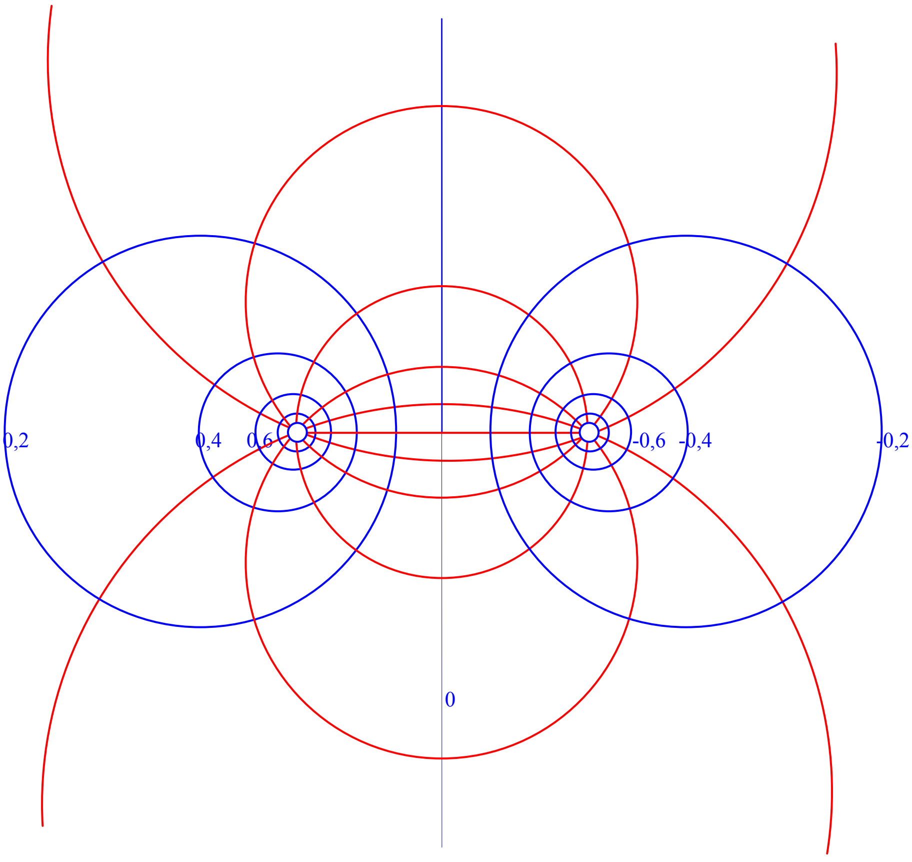
Sakarības (1.9) lieto jebkurā koordinātu sistēmā, taču to izteiksmes (1.8) un (1.10) vietā katrā koordinātu sistēmā ir savas.

Matemātiski var pierādīt, ka skalāras funkcijas gradients ir vektors, kas vērsts šīs funkcijas straujākā pieauguma virzienā. Tātad vektors $\boldsymbol{E}$ vērsts potenciāla straujākās samazināšanās virzienā (ievērojot mīnusa zīmi izteiksmēs (1.9)). Tas apstiprina iepriekšējos apgalvojumus par ekvipotenciāļu un spēka līniju ortogonalitāti. Ilustrācijai 1.9. attēlā parādīta divu skaitliski vienādu pretēju zīmju punktveida lādiņu kopējā ekvipotenciālo un spēka līniju aina. Tajā redzama abu līkņu saimju ortogonalitāte, ekvipotenciāļu koncentrēšanās lādiņu tuvumā, kur lauka intensitāte ir lielāka u. taml. Punktveida lādiņu tiešā tuvumā, protams, ne ekvipotenciāles ne spēka līnijas nav zīmētas.

1.10. attēlā parādīta divu garu (teorētiski – bezgalīgi garu) paralēlu vadu (elektrodu) elektriskā lauka aina. Vadi uzlādēti ar vienmērīgu lādiņu lineāro blīvumu



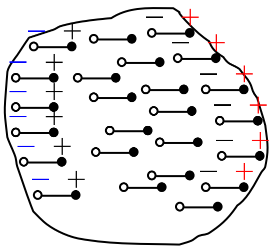
1.9. att. Divu skaitliski vienādu pretēju zīmju punktveida lādiņu elektriskā lauka aina.



1.10. att. Divu tievu garu, ar pretēju zīmju lādiņiem vienmērīgi uzlādētu vadu (divvadu līnijas) elektriskā lauka aina vadiem perpendikulārā plaknē.

(C/m). Var pierādīt, ka ekvipotenciālās līnijas (zilās) un spēka līnijas (sarkanās) šajā gadījumā veido ortogonālu riņķa līniju saimes. Spēka līnijas koncentrējas vados, bet ekvipotenciāles aptver tos. Arī vertikālā simetrijas ass starp abiem vadiem ir ekvipotenciālā līnija; tās potenciāls pieņemts vienāds ar 0. Sākot no pirmās (iekšējās) ekvipotenciāles, pārējās zīmētas ik pēc potenciāla izmaiņas 0,2 no pirmās potenciāla.

1.3. Elektriskais lauks vielā. Vielas polarizācija, elektriskā lauka indukcijas (nobīdes) vektors.



Vielai polarizējoties, uz ķermeņa virsmas rodas nekompensēts saistītais lādiņš.

Iepriekšējā sadaļā iegūtās Kulona likuma un punktveida lādiņa elektriskā lauka intensitātes un potenciāla izteiksmes (1.1), (1.2) un (1.7) derīgas tikai vakuumā un tuvināti arī gaisā. Vielā elektriskā lauka ietekmē notiek atomos un molekulās ietverto pozitīvo un negatīvo lādiņu nobīde un no summāri neitrālas daļiņas izveidojas *elektriskais dipols*. Ķermeņa iekšienē dipolu pozitīvie un negatīvie lādiņi aptuveni kompensējas, taču uz tā virsmas izveidojas nekompensēts *saistītais* lādiņš. Saistīto lādiņu daudzums var būt visai ievērojams, tas atkarīgs no ārējā lauka intensitātes un no vielas īpašībām − tās spējas polarizēties.

Minēto parādību matemātiskam aprakstam jāievieš daži jauni jēdzieni.

Dipolu raksturo ar *dipola momentu* − vektoru $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$, kur q ir dipola pozitīvais lādiņš, bet l − attālums starp lādiņiem. Vektors $\boldsymbol{l}$ vērsts pozitīvā lādiņa nobīdes virzienā. Par vielas *polarizācijas vektoru* $\boldsymbol{P}$ sauc dipolu momentu summas robežu tilpumā V, kad $V \to 0$. Protams, ka tieši saskaitīt dipolu momentus kādā tilpumā nav iespējams, taču katras vielas polarizēšanās spēju iespējams noteikt eksperimentāli. Daudzām vielām polarizācijas vektors $\boldsymbol{P}$ ir tieši proporcionāls pieliktā ārējā lauka intensitātei $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{P} = \varepsilon_o k\boldsymbol{E}$, kur koeficients k (t.s. *elektriskā susceptibilitāte*) katrai vielai nosakāms eksperimentāli.

Elektriskā lauka *nobīdes* jeb *indukcijas* vektoru $\boldsymbol{D}$ definē kā summu:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}. \qquad (1.11)$$

Ja $\boldsymbol{P}$ ir tieši proporcionāls $\boldsymbol{E}$, tad $\boldsymbol{D} = \varepsilon_o\boldsymbol{E} + \varepsilon_o k\boldsymbol{E} = \varepsilon_o(k+1)\boldsymbol{E}$. Apzīmējot $k+1 = \varepsilon$, iegūst

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_o\boldsymbol{E}. \qquad (1.12)$$

Koeficientu ε sauc par vielas *relatīvo dielektrisko caurlaidību*. Kā redzams, tad vielās, kurās vektori $\boldsymbol{P}$ un $\boldsymbol{E}$ ir paralēli un tieši proporcionāli viens otram, tādi ir arī vektori $\boldsymbol{D}$ un $\boldsymbol{E}$.

Vektora $\boldsymbol{D}$ un koeficienta ε izmantošana ļauj izvairīties no saistīto lādiņu tiešas aplūkošanas. Tā, piemēram, punktveida lādiņa laukā $\boldsymbol{D}$ nosakāms neatkarīgi no vielas, kādā šis lādiņš atrodas,

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^o, \text{ bet, nosakot } \boldsymbol{E}, \text{ jāievēro, ka } \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\varepsilon\varepsilon_0\text{:} \quad \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}\boldsymbol{r}^o.$$

Vektors $\boldsymbol{D}$ atkarīgs tikai no *brīvajiem* (ne saistītajiem) lādiņiem telpā, bet visās izteiksmēs, kas satur elektrisko konstanti ε_o, tā jāaizvieto ar reizinājumu $\varepsilon\varepsilon_o$.

Vektori $\boldsymbol{P}$ un $\boldsymbol{D}$ tomēr ir diezgan mākslīgi definēti lielumi. Robeža $\boldsymbol{P}$ definīcijā $V \to 0$ jāsaprot tā, ka tilpuma izmēri tomēr paliek lielāki par molekulārajiem attālumiem. Pretējā gadījumā matemātiskais punkts $V = 0$ varētu atrasties vietā, kur vielā nav ne molekulu, ne atomu, ne arī dipolu. Pēc tam, kad, izmantojot galīga lieluma tilpumu, noteikts $\boldsymbol{P}$, tomēr uzskata, ka ar vektoriem $\boldsymbol{P}$ un $\boldsymbol{D}$ raksturojams katrs punkts vielā, arī tie, kuros dipolu nav. Ja jāpēta elektriskais lauks molekulārā līmenī, lielumi $\boldsymbol{P}$ un $\boldsymbol{D}$ nav lietojami.

Vektora diverģence. Ja kādā telpas apgabalā ir izkliedēts elektriskais lādiņš, kuru katrā punktā var raksturot ar lādiņu blīvumu ρ (C/m^3), vektora $\boldsymbol{D}$ jaunu spēka līniju rašanos šādos punktos raksturo skalārs lielums, kuru sauc par vektora *diverģenci*: div$\boldsymbol{D}$. Diverģences izteiksme Dekarta koordinātu sistēmā ir

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Šādu izteiksmi var iegūt arī, skalāri reizinot simbolisko vektoru ∇ ar vektoru $\boldsymbol{D}$ (vai citu vektoru, kuram lieto šo operāciju), t.i., $\mathrm{div}\boldsymbol{D} \equiv \nabla\boldsymbol{D}$.

Var pierādīt, ka

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho. \qquad (1.13)$$

Punktos, kur lādiņu nav ($\rho = 0$), div$\boldsymbol{D} = 0$*).

Ja $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, tad telpas apgabalā, kurā $\varepsilon = \mathrm{const}$, to var iznest ārpus atvasinājumiem, iegūstot

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon\varepsilon_o \quad \text{vai} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0, \qquad (1.14)$$

apgabalā, kur lādiņu nav.

1.4. Laplasa un Puasona vienādojums elektriskajam potenciālam.

No izteiksmēm (1.14) kopā ar (1.9) var iegūt vienādojumu, ko apmierina potenciāls φ. Tā kā $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\nabla\varphi$, tad $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{divgrad}\varphi = -\nabla(\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi$. Operatoru ∇^2 sauc par Laplasa operatoru (laplasiānu). Tā izteiksme Dekarta koordinātu sistēmā ir $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Ievērojot (1.14) Dekarta koordinātu sistēmā iegūst vienādojumus potenciālam

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_o} \qquad (1.15)$$

jeb apgabalā, kur ρ = 0:

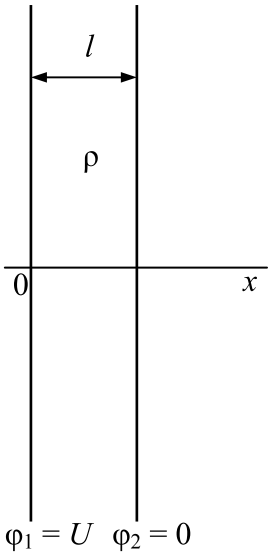
$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.16)$$

Vienādojumu (1.15) sauc par Puasona, bet (1.16) − par Laplasa vienādojumu. Praksē Laplasa vienādojuma atrisināšana ir viens galvenajiem paņēmieniem elektriskā potenciāla sadalījumā noteikšanai telpā. Ja potenciāls ir noteikts kā koordinātu funkcija, izmantojot (1.9) var noteikt arī elektriskā lauka intensitāti.

Diferenciālvienādojumiem, bet jo sevišķi parciālajiem diferenciālvienādojumiem, ir raksturīgi tas, ka tos apmierina teorētiski bezgalīgi daudz dažādas funkcijas. Tā, piemēram, Laplasa vienādojumu (1.16) apmierina atrisinājumi φ = 0, φ = const, bet bez tam ir vēl bezgalīgi daudz citu funkciju. (Šīs funkcijas matemātikā sauc par *harmoniskām* funkcijām.) Fiziski tas ir ļoti labi saprotams − lai iegūtu viennozīmīgu atrisinājumu, jāzina, kas rada meklējamo potenciālu, jāzina lādiņu sadalījums telpā un potenciāla sadalījums uz aplūkojamā apgabala robežas (t.s. *robežnoteikumi*).

---

*) Izteiksmi (1.13) sauc par Gausa teorēmu diferenciālajā formā. Tās pierādījumam izmanto integrālās sakarības elektriskajā laukā, kuras aplūkosim 5. nodaļā.



1.11. att. Plakana kondensatora matemātiskais modelis

Plakana kondensatora lauks. Noteiksim potenciāla sadalījumu telpā starp liela plakana kondensatora klājumiem, kas pieslēgti spriegumam U, gadījumā, kad dielektriskā vide starp klājumiem uzlādēta ar konstantu lādiņu tilpuma blīvumu ρ. Lai vienkāršotu risinājumu, pieņemsim, ka klājumus veido bezgalīgas paralēlas plaknes, kas novietotas kā parādīts 1.11. attēlā. Tad potenciāls atkarīgs tikai no koordinātas x, jo visi punkti klājumiem paralēlā plaknē atrodas vienādos apstākļos − bezgalīgi tālu no klājumu malām. Tātad Puasona vienādojumā (1.15) atvasinājumi pēc y un z vienādi ar nulli. Atliek:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Integrējot šo izteiksmi vienreiz pēc dx, iegūstam

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}x + C_1 ,$$

kur C_1 ir integrēšanas konstante. (Atcerēsimies, ka integrēšana ir atvasināšanai pretēja darbība, tādēļ otrais atvasinājums pārvēršas par pirmās kārtas atvasinājumu.) Integrējot otrreiz:

$$\varphi = -\frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}x^2 + C_1 x + C_2 . \qquad (1.17)$$

Integrēšanas konstanšu noteikšanai jāizmanto kondensatora klājumiem pieslēgtais spriegums U. Ja klājums $x = 0$ pieslēgts sprieguma avota augstākajam potenciālam, bet klājums $x = l$ − zemākajam, varam pieņemt, ka $\varphi = \varphi_1 = U$, ja $x = 0$, un $\varphi = \varphi_2 = 0$, ja $x = l$. Ievietojot pārmaiņus šos nosacījumus izteiksmē (1.17), iegūstam

$$C_2 = U;$$

$$0 = -\frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}l^2 + C_1 l + C_2 .$$

No pēdējās izteiksmes var iegūt C_1: $C_1 = \dfrac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}l - \dfrac{U}{l}$.

Ievietojot iegūtās konstanšu vērtības izteiksmē (1.17), iegūstam galīgo atrisinājuma izteiksmi:

$$\varphi = -\frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}x^2 + \left(\frac{\rho l}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{U}{l}\right)x + U .$$

Parastos apstākļos tilpuma lādiņš dielektriķī starp kondensatora klājumiem nerodas ($\rho = 0$). Tad atrisinājums ievērojami vienkāršojas (to varētu iegūt arī tieši, risinot Laplasa vienādojumu):

$$\varphi = U\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Lauka intensitāte (no gradienta izteiksmes (1.8)):

$$E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{U}{l} .$$

Kā redzams, ja $\rho = 0$, iegūta potenciāla lineāra maiņa starp klājumiem no U līdz 0 un pēc lieluma un virziena nemainīga elektriskā lauka intensitāte visā apgabalā. Šādu lauku, kurā $\boldsymbol{E} = \text{const}$, sauc par homogēnu lauku. Homogēnā laukā spēka līnijas ir paralēlas taisnes, bet ekvipotenciāles − arī savstarpēji paralēlas taisnes, kas perpendikulāras spēka līnijām. Reālā plakanā kondensatorā homogēnais lauks saglabājas centrālajā daļā, klājumu malu tuvumā spēka līnijas izliecas uz āru.

Risinot dažādus uzdevumus, tos jācenšas iespējami vienkāršot. Iepriekšējā piemērā mēs pieņēmām, ka potenciāls atkarīgs tikai no vienas koordinātas. Ja gribētu noteikt potenciāla sadalījumu, ievērojot arī «malu efektu», Laplasa vai Puasona vienādojums būtu jārisina atkarībā no visām trijām koordinātām, kas ir visai sarežģīts uzdevums. Lauku sauc par plakanparalēlu, ja potenciāls atkarīgs tikai no divām koordinātām Dekarta koordinātu sistēmā jeb, kas ir tas pats, − tikai no koordinātām r un α cilindriskajā sistēmā. Plakanmeridionālā laukā lauka aina nav atkarīga no α cilindriskajā sistēmā, bet sfēriskās simetrijas gadījumā tā ir atkarīga tikai no rādiusa r sfēriskajā koordinātu sistēmā. (Sfēriska simetrija piemīt, piemēram, punktveida lādiņa laukam.) Var būt vēl arī citi simetrijas gadījumi, kas atļauj samazināt koordinātu skaitu, kas jāievēro risinājumā, līdz divām vai vienai.

Robežnoteikumi elektriskajā laukā. Laplasa un Puasona vienādojumi ir pareizi tikai homogēnā vidē, kur $\varepsilon = \text{const}$, jo tikai tādā gadījumā to var iznest ārpus atvasinājumiem diverģences un gradienta izteiksmēs. Praksē tomēr aplūkojamais apgabals var sastāvēt no vairākām homogēnām daļām, kurās katrā ir citāda konstanta dielektriskās caurlaidības ε vērtība. Tādā gadījumā atrisinājums jāiegūst katrai daļai atsevišķi, turklāt tajā jābūt pietiekoši daudz integrēšanas konstantēm, lai uz apgabalu robežām varētu panākt fiziski nepieciešamo robežnoteikumu izpildīšanos. Mēs aplūkosim noteikumus galvenokārt uz divu dielektrisku vielu robežas.

1. Potenciāls nevar mainīties ar lēcienu, t.i.,

$$\varphi_{1\text{rob}} = \varphi_{2\,\text{rob}}, \qquad (1.18)$$

kur φ_1 un φ_2 ir potenciāls pirmajā un otrajā apgabalā. Šis noteikums ir fiziski pilnīgi saprotams: potenciāla izmaiņa ir vienāda ar lādiņa pārvietošanai nepieciešamo darbu, bet bezgalīgi mazā pārvietojumā, pārejot robežu, darbs nevar mainīties par galīgu lielumu.

1'. Sekas no iepriekšējā noteikuma ir tas, ka vektora $\boldsymbol{E}$ tangenciālā (t.i., robežas pieskarei paralēlā) komponente arī nevar mainīties ar lēcienu:

$$E_{1\text{t,rob}} = E_{2\text{t,rob.}} \qquad (1.18')$$

Šo izteiksmi var pierādīt, pielietojot izteiksmi (1.6) noslēgtam kontūram, kura divas malas atrodas cieši pie robežas tās vienā un otrā pusē. Integrēšanas konstanšu noteikšanai pēc izvēles var izmantot sakarības (1.18) vai (1.18'), bet ne abas, jo tās veidos identiskus vienādojumus.

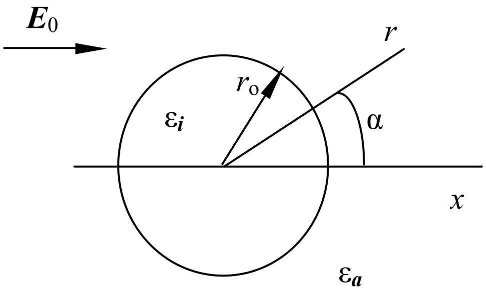
2. Vektora $\boldsymbol{D}$ normālā (t.i., robežas pieskarei perpendikulārā) komponente nemainās ar lēcienu:

$$D_{1\text{n,rob}} = D_{2\text{n,rob.}} \qquad (1.19)$$

(Šo izteiksmi pierāda, izmantojot integrālo sakarību − Gausa teorēmu, par kuru runāsim 5. nodaļā.)

Specifiskos apstākļos šos noteikumus var mainīt. Tā, piemēram, elektrostatiskajā laukā uz vadoša materiāla virsmas koncentrējas brīvie lādiņi tā, lai vadošā materiāla ķermenis un tā virsma būtu ekvipotenciāla (pretējā gadījumā vadoša materiāla ķermenī plūstu strāva). Parasti pieņem, ka šie lādiņi koncentrējušies bezgalīgi plānā slānī uz virsmas. Tādā gadījumā noteikums (1.19) vairs nav spēkā.

Dielektrisks cilindrs, ienests homogēnā laukā. Aplūkosim gadījumu, kad homogēnā elektriskajā laukā ievietots garš cilindrs, kura dielektriskā caurlaidība ε_i atšķiras no ārējās vides caurlaidības ε_a. Cilindra ass ir perpendikulāra lauka intensitātei $\boldsymbol{E}_o$, kāda bija telpā pirms cilindra ievietošanas (1.12. att.), tā rādiuss − r_o. Izvēlamies cilindrisko koordinātu sistēmu, kurā x-ass virziens sakrīt ar $\boldsymbol{E}_o$ virzienu, bet z-ass sakrīt ar cilindra asi (tā ir perpendikulāra zīmējuma plaknei). Ja cilindru uzskata par bezgalīgi garu, tad lauks ir plakanparalēls − potenciāls φ nav atkarīgs no z, bet ir tikai koordinātu r un α funkcija.



1.12. att. Garš cilindrs ārējā laukā. Potenciāls φ atkarīgs tikai no koordinātām r un α cilindriskajā koordinātu sistēmā.

Var pārliecināties, Laplasa vienādojumu cilindriskajā koordinātu sistēmā apmierina funkcija

$$\varphi = Ar\cos\alpha + \frac{B}{r}\cos\alpha,$$

kur A un B − jebkuras konstantes. (Iesakām lasītājam par to pārliecināties pašam, izmantojot Laplasa operatora izteiksmi cilindriskajā koordinātu sistēmā.) Šo atrisinājumu izmantosim kā cilindra iekšpusē, tā ārpusē taču sagaidāms, ka tie atšķirsies ar konstanšu vērtībām. Cilindra iekšienē:

$$\varphi_i = A_1 r\cos\alpha + \frac{B_1}{r}\cos\alpha, \qquad r<r_o; \qquad (1.20)$$

ārpusē:

$$\varphi_a = A_2 r\cos\alpha + \frac{B_2}{r}\cos\alpha, \qquad r>r_o. \qquad (1.21)$$

Turpinājumā jānosaka šis 4 konstantes tā, lai būtu spēkā noteikumi (1.18) un (1.19).

Vispirms izvēlamies punktu, kur potenciāls vienāds ar nulli − cilindra centrā ($r = 0$). Tad no iekšējā potenciāla izteiksmes (1.20) tūlīt redzams, ka jābūt $B_1 = 0$. Pretējā gadījumā nulles vietā iegūtu bezgalīgi lielu potenciāla vērtību cilindra centrā.

Ja $r\to\infty$, cilindra ietekmei uz ārējo lauku jāizzūd, t.i., potenciālam jātiecas uz homogēna lauka potenciālu: $\varphi_a \to -E_o x = -E_o r\cos\alpha$ (jo $x = r\cos\alpha$). No otras puses, ja $r\to\infty$, otrais saskaitāmais (1.21) izteiksmē izzūd, jo r atrodas saucējā. Tādēļ jābūt $A_2 = -E_o$.

Divu atlikušo konstanšu A_1 un B_2 noteikšanai jāizmanto noteikumi (1.18) un (1.19). Saskaņā ar (1.18) potenciāliem φ_i un φ_a jābūt vienādiem uz cilindra virsmas ($r = r_o$). Ievietojot izteiksmēs (1.20) un (1.21) $r = r_o$ un jau atrastās B_1 un A_2 vērtības, pēc saīsināšanas ar cosα iegūstam vienādojumu

$$A_1 r_o = -E_o r_o + \frac{B_2}{r_o}. \qquad (1.22)$$

Lai izmantotu (1.19), ievērojam, ka cilindra virsmai normālā vektora $\boldsymbol{E}$ komponente ir radiālā komponente E_r. No gradienta izteiksmes cilindriskajā koordinātu sistēmā:

$$E_{r,i} = -\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} = -A_1\cos\alpha \qquad \text{un} \qquad E_{r,a} = -\frac{\partial\varphi_a}{\partial r} = E_o\cos\alpha + \frac{B_2}{r^2}\cos\alpha.$$

Tālāk, var iegūt $D_{r,i} = \varepsilon_i\varepsilon_o E_{r,i}$ un $D_{r,a} = \varepsilon_a\varepsilon_o E_{r,a}$ izteiksmes, ievietot tajās $r = r_o$ un pielīdzināt tās saskaņā ar (1.19). Tad pēc saīsināšanas ar ε_o un cosα iegūst

$$-\varepsilon_i A_1 = \varepsilon_a E_0 + \varepsilon_a \frac{B_2}{r_0^2}. \qquad (1.23)$$

Izteiksmes (1.22) un (1.23) veido vienādojumu sistēmu, no kuras var atrast A_1 un B_2. No (1.22) var izteikt B_2: $B_2 = (A_1+E_\text{o})r_\text{o}^2$. Ievietojot to izteiksmē (1.23), iegūstam

$$A_1 = -\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} E_\text{o} \quad \text{un} \quad B_2 = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} E_\text{o} r_\text{o}^2.$$

Tātad cilindra iekšienē ($r < r_0$):

$$\varphi_i = -\frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} E_0 r\cos\alpha;$$

Ārējā vidē ($r > r_0$):

$$\varphi_a = -E_\text{o} r\cos\alpha + E_\text{o} \frac{r_\text{o}^2}{r} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \cos\alpha.$$

Tā kā $r\cos\alpha = x$, tad cilindra iekšienē potenciāls ir lineāri atkarīgs no x. Tātad iekšienē ir homogēns lauks:

$$E_i = E_x = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} E_\text{o} = \text{const.}$$

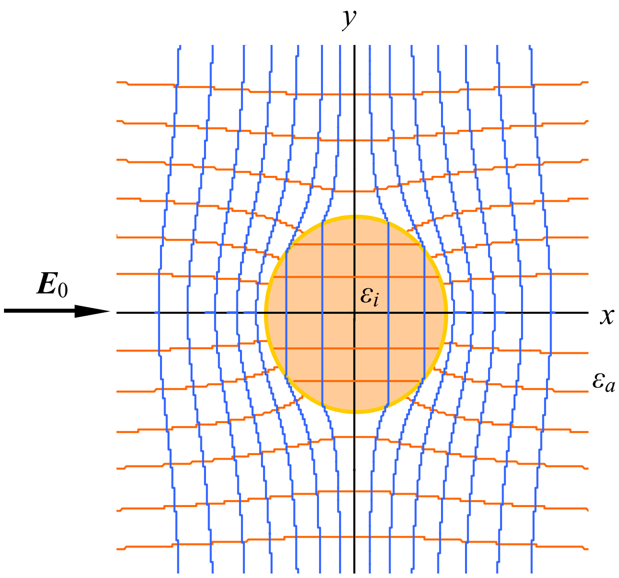
Ja $\varepsilon_i > \varepsilon_a$, tad summa $\varepsilon_i + \varepsilon_a$ ir lielāka par $2\varepsilon_a$, un $E_i < E_0$. To var skaidrot šādi. Ja $\varepsilon_i > \varepsilon_a$, tad cilindra materiāls polarizējas vairāk nekā ārējā vide. Līdz ar to uz robežas daļas, atbilstošas pozitīvām x vērtībām (1.12. att.), ir vairāk pozitīvo saistīto lādiņu, kas cilindra materiālā nobīdīti ārējā lauka virzienā, nekā negatīvo lādiņu, kuri no ārējās vides pievilkti pretēji E_o virzienam. Uz robežas daļas, atbilstošas negatīvām x vērtībām, savukārt, ir vairāk negatīvo saistīto lādiņu nekā pozitīvo. Tādējādi nekompensētie saistītie lādiņi rada elektrisko lauku, kura intensitāte vērsta pretēji ārējam laukam un samazina kopējo E vērtību cilindrā.

Ja $\varepsilon_i < \varepsilon_a$, nekompensēti pozitīvie saistītie lādiņi rodas kreisajā pusē (1.12. att.), bet negatīvie − labajā. Tad $E_i > E_\text{o}$.

1.13. attēlā parādīta aptuvena lauka aina cilindra tuvumā gadījumam, kad $\varepsilon_i > \varepsilon_a$. Cilindra tuvumā spēka līnijas noliecas x-ass virzienā. Ieejot cilindrā, spēka līnijās rodas pārtraukums, ko izraisa nekompensētie saistītie lādiņi uz cilindra virsmas. Iekšējā apgabalā ir homogēns lauks, taču lauka intensitāte ir mazāka nekā E_o.

Ekvipotenciālās līnijas ir ortogonālas spēka līnijām, tās cenšas cilindru apiet. Ekvipotenciālēs, protams, nekādu pārtraukumu nav.

Gadījumā, kad $\varepsilon_i < \varepsilon_a$, spēka līnijas cenšas cilindru apiet, bet ekvipotenciāles − tuvoties tam.



1.13. att. Dielektrisks cilindrs, ienests homogēnā elektriskajā laukā; $\varepsilon_i > \varepsilon_a$. Ar sarkanajām līnijām attēlotas spēka līnijas, ar zilajām − ekvipotenciāles.

1.5. Lauka ainas eksperimentāla noteikšana. Elektriskā modelēšana.

Ļoti bieži Laplasa vienādojuma precīzu analītisku atrisinājumu nav iespējams iegūt. Tādā gadījumā lauka aina jāiegūst ar skaitliska risinājuma palīdzību vai arī eksperimentāli. Laplasa vienādojuma skaitliskai risināšanai ir izveidotas matemātiskās programmas un vismaz plakanparalēla lauka gadījumā risinājums ar datora palīdzību parasti nesagādā sevišķas grūtības. Taču iespējams izmantot arī eksperimentu pētāmās iekārtas modelī. Aplūkosim šo, t.s. *elektrisko modelēšanu* sīkāk.

Vispirms jāatzīmē, ka izdarīt tiešu eksperimentu, t.i., izmērīt ar voltmetru potenciāla sadalījumu telpā dielektriskā vidē nav iespējams. Voltmetrs sastāv no elektrību vadošām daļām un izlīdzina potenciālu starp tā spailēm, tādēļ rādījums būs vienāds ar nulli. Lai tas nenotiktu, voltmetra pretestībai jābūt daudzkārt lielākai par elektrisko pretestību, kāda pastāv starp tiem punktiem, kuru potenciālu starpību gribam noteikt. Dielektriskās vides pretestība uzskatāma par bezgalīgi lielu un voltmetra pretestība nevar būt lielāka par to.

Šo grūtību var apiet, ievērojot, ka potenciāls φ apmierina Laplasa vienādojumu arī līdzstrāvu elektriskajā laukā. Vadošā vidē strāvas blīvums − vektors $\boldsymbol{J}$ (A/m^2) − katrā telpas punktā ir tieši proporcionāls elektriskā lauka intensitātei $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E},$$

kur γ ir vides īpatnējā vadītspēja (šo sakarību sauc par Oma likumu diferenciālajā formā). Ja vadošajā vidē nekur nenotiek lādiņu uzkrāšanās, kā tas ir līdzstrāvu laukā, tad $\mathrm{div}\boldsymbol{J} = \mathrm{div}(\gamma\boldsymbol{E}) = 0$. Ja turklāt $\gamma = \mathrm{const}$, tad, ievērojot (1.9), potenciālam iegūstam Laplasa vienādojumu $\nabla^2\varphi = 0$ tāpat kā dielektriskā vidē. Tātad dielektrisko vidi var aizvietot ar materiālu, kuram piemīt neliela vadītspēja, turklāt modelī ir iespējama kā ģeometriskā, tā potenciāla (sprieguma) mēroga maiņa. Jāparūpējas vienīgi par to, lai modelī saglabātos tādi paši robežnoteikumi, kādi pastāv reālajā iekārtā.

Ja iepriekš ir zināma kāda ekvipotenciālā līnija vai virsma (piemēram, pētāmās iekārtas simetrijas dēļ), modelī to var aizvietot ar metālisku elektrodu, jo salīdzinājumā ar vāji vadošo modeļa materiālu var uzskatīt, ka metāls ir ideāls vadītājs un tā virsma ir ekvipotenciāla. Savukārt modeļa vadošā materiāla robeža ar izolējošu apkārtējo vidi sakrīt ar spēka līniju, jo vektoram ***J*** nevar būt normālās komponentes attiecībā pret robežu ar nevadošu vidi, tāpat kā vektoram ***E*** nav normālās komponentes attiecībā pret spēka līniju.

Plakanparalēlā laukā vektoram ***E*** var būt tikai divas komponentes. (Ja, piemēram, potenciāls φ ir atkarīgs tikai no koordinātām x un y, bet nav koordinātas z funkcija, tad $E_z = -d\varphi/dz = 0$.) Tādēļ šādu lauku var pētīt plānā plakanā vadoša materiāla slānī, kurā arī nav materiāla virsmai perpendikulāras vektora ***E*** komponentes. Praksē izmanto elektrovadošu papīru vai t.s. elektrolītisko vannu − plānu vadoša šķidruma (elektrolīta) slāni. Ja jāpēta iekārta, kurā potenciāls atkarīgs no visām telpas koordinātām, jālieto telpisks modelis, kas, protams, ir sarežģītāk.

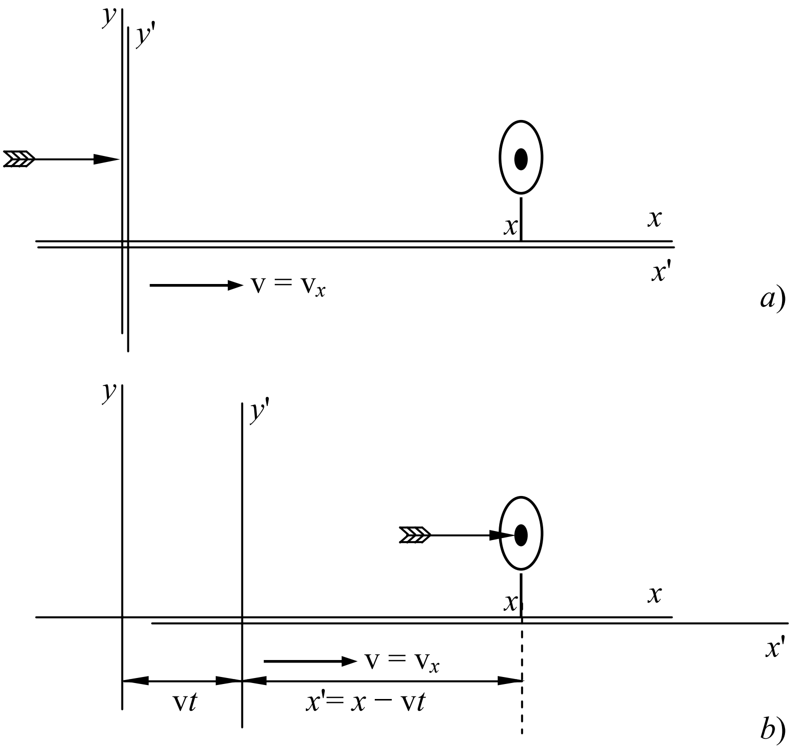
2. Relativitātes teorijas pamati.

Parasti saka, ka Kulona likums (1.1) nosaka nekustīgu punktveida lādiņu mijiedarbības spēku, taču patiesībā jau nevienu ķermeni ne uz Zemes, ne arī kaut kur citur Visumā nevar uzskatīt par absolūti nekustīgu. Zeme griežas ap savu asi, riņķo ap Sauli, bet tā ar visām savām planētām kustas starpzvaigžņu telpā. Runājot par kustību, jo sevišķi − par vienmērīgu taisnvirziena kustību, tā jāsaprot relatīvā nozīmē: kāds ķermenis var kustēties attiecībā pret otru ķermeni, viena koordinātu sistēma − attiecībā pret citu, lādiņš − attiecībā pret novērotāju, vai novērotājs attiecībā pret lādiņu. Kulona likums dod abu savstarpēji nekustīgo lādiņu mijiedarbības spēku, kādu izmēra novērotājs, kurš arī ir nekustīgs attiecībā pret lādiņiem.

Lai izpētītu lādiņu mijiedarbības spēku, kādu izmērīs novērotājs, kurš kustas attiecībā pret lādiņiem (vai otrādi), jāiemācās dabas likumu izpausmes pārnest no vienas koordinātu sistēmas uz citu, kura atrodas kustībā attiecībā pret pirmo (vai otrādi). Ar šiem jautājumiem nodarbojas relativitātes teorija, un tās secinājumus mēs nedrīkstam neievērot.

2.1. Ņūtona-Galileja koordinātu transformācijas (klasiskajā mehānikā).

Aplūkosim šādu gadījumu. Koordinātu sistēmas x, y, z sākumā atrodas strēlnieks, kurš momentā $t = 0$ izšauj x-ass virzienā bultu un redz, ka tā attālumā x novietotu mērķi sasniedz laika momentā t. Ir vēl otrs novērotājs, kurš ar vienmērīgu ātrumu $\mathrm{v} = \mathrm{v}_x$ kustas attiecībā pret pirmo, kurš izšāva bultu. «Kustīgais» novērotājs nes sev līdz koordinātu sistēmu x', y', z', pats atrazdamies tās centrā. Abu koordinātu sistēmu asis ir attiecīgi paralēlas, bultas izšaušanas momentā to sākumi sakrīt (2.1. att. *a*).



2.1. att. Momentā, kad bulta sasniedz mērķi, kustīgais novērotājs atrodas attālumā $x' = x - \mathrm{v}t$ no tā, kā māca mūsu ikdienas pieredze.

Ikdienas pieredze rāda, ka arī otrais, «kustīgais» novērotājs konstatēs to pašu bultas trāpījuma momentu $t' = t$, tikai mērķis atradīsies attālumā $x' = x - \text{v}t$ no viņa koordinātu sistēmas sākuma, jo pa bultas lidojuma laiku viņš ir noskrējis attālumu vt. Ja kustība notiek x-ass virzienā, tad koordinātas y un z paliek vienādas abās koordinātu sistēmās. Tātad šajā gadījumā koordinātu noteikšanai kustīgajā koordinātu sistēmā lietojamas šādas vienkāršas sakarības:

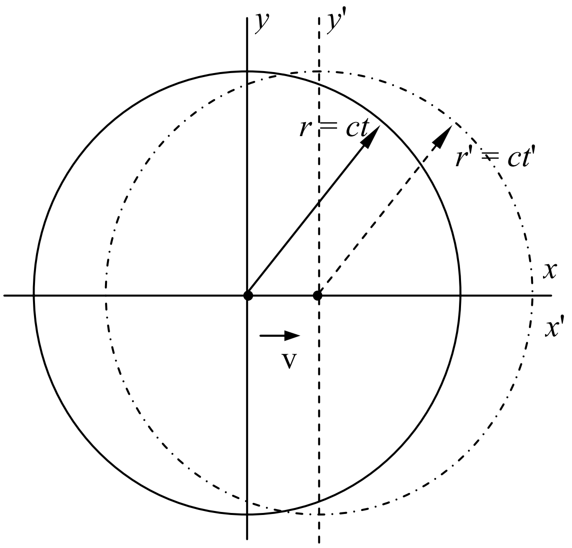
$$\begin{aligned} x' &= x - \text{v}t; \\ y' &= y; \\ z' &= z; \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sakarības (2.1) sauc par Ņūtona-Galileja koordinātu transformācijām (ja kustība notiek x-ass virzienā). Šķiet, ka, lietotas «ikdienas» vajadzībām, tās nevienu nav pievīlušas, taču atliek nedaudz padomāt un šo transformāciju neprecizitāte kļūst acīmredzama.

Kā abi novērotāji var visātrāk uzzināt, ka bulta ir sasniegusi mērķi? Tikai tā, ka gaisma, kas trāpījuma brīdī atstarojas no mērķa, sasniedz novērotāju acis. Gaismas izplatīšanās ātrums $c = 300000$ km/s $= 3 \cdot 10^8$ m/s gan ir ļoti liels, taču ne bezgalīgi liels. Tādēļ novērotājs, kas atrodas tuvāk mērķim, par trāpījumu uzzinās ātrāk nekā strēlnieks pats. Kā redzams, tad Ņutona-Galileja koordinātu transformāciju formulās netieši tiek pieņemts, ka gaismas izplatīšanās ātrums ir bezgalīgi liels.

Ņutona-Galileja transformāciju formulas varētu mēģināt precizēt, ievērojot arī niecīgo laika intervālu, kādā gaisma noiet attālumu, kas šķir abus novērotājus, taču to nav vērts darīt, jo patiesībā lieta ir daudz nopietnāka.

Aplūkosim līdzīgu gadījumu ar diviem savstarpēji kustīgiem novērotājiem, tikai šoreiz viens no viņiem momentā, kad abi atrodas blakus, nevis izšauj bultu, bet ieslēdz gaismas avotu, kura gaisma sfēriska viļņa veidā izplatās uz visām pusēm ar ātrumu c. Vai ir iespējams konstatēt, ka pēc kāda laika viens no novērotājiem vairs neatrodas sfēriskā viļņa centrā, kā tas bija, gaismas avota ieslēgšanas momentā? Uz šo jautājumu jāatbild viennozīmīgi: nē, tādas iespējas nav! Un ne tāpēc, ka gaismas ātrums ir pārāk liels, lai kāds materiāls ķermenis varētu viļņa fronti kaut cik jūtami panākt, bet principiāli. Fizikā ir izdarīti daudzi eksperimenti, lai konstatētu gaismas ātruma atšķirību attiecībā pret koordinātu sistēmām, kuras kustas viena attiecībā pret otru, taču tie visi ir devuši negatīvus rezultātus. Šādas atšķirības nav! Tādā gadījumā mums jāsecina, ka pēc gaismas avota ieslēgšanas katrs no abiem novērotājiem izmērīs, ka viņš visu laiku atrodas sfēriskā viļņa pašā centrā, kaut gan viņi abi vairs nebūt neatrodas vienā punktā (2.2. att.).



2.2. att. Katrs novērotājs izmēra, ka katrs no viņiem atrodas viena un tā paša sfēriskā gaismas viļņa centrā, kaut gan viņi neatrodas vienā punktā. Kā to izskaidrot?

Šo paradoksu izskaidro relativitātes teorija (A. Einšteins, 1905. g.): ikdienā lietojamās Ņūtona-Galileja koordinātu transformācijas jāaizvieto ar citām − tādām, kurās gaismas ātrums saglabājas nemainīgs attiecībā pret jebkurām savstarpēji kustīgām koordinātu sistēmām. Mēs šeit aprobežosimies tikai ar t.s. speciālo relativitātes teoriju, kura aplūko vienīgi vienmērīgu taisnvirziena kustību.

2.2. Lorenca transformācijas.

Aplūkosim 2.2. attēlā parādītās koordinātu sistēmas x, y, z, t un x', y', z', t', no kurām pirmo sauksim par «nekustīgu», bet otro, kura attiecībā pret pirmo kustas ar ātrumu v x-ass virzienā − par «kustīgu». (Koordinātu sistēmas, kuras cita pret citu atrodas vienmērīgā taisnvirziena kustībā, sauc par inerciālām koordinātu sistēmām.) Sfēriskā viļņa frontes rādiuss «nekustīgajā» sistēmā ir $r = ct$, bet «kustīgajā» − $r' = ct'$, kur $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ un $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Lai atbrīvotos no kvadrātsaknēm, iepriekšējās izteiksmes kāpinām kvadrātā. Tad $r^2 - c^2t^2 = 0$ un $r'^2 - c^2t'^2 = 0$.

Tātad $r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$.

Tā kā $v = v_x$, tad koordinātas y un z abās koordinātu sistēmās paliek vienādas. Līdz ar to iegūstam vienādojumu

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2. \tag{2.2}$$

No šejienes jāiegūst sakarības starp x,t un x',t', t.i., koordinātu transformāciju formulas, kuras saglabā nemainīgu gaismas ātrumu c abās koordinātu sistēmās.

Meklēsim

$$x'=a_1x+a_2t;$$
$$t'=a_3x+a_4t, \tag{2.3}$$

kur a_1, a_2, a_3, a_4 – ir pagaidām nezināmi koeficienti, kas nesatur ne x', t' ne x, t. Ievietojot (2.3) izteiksmes vienādojumā (2.2) un apvienojot līdzīgos locekļus, iegūstam:

$$x^2 - c^2t^2 = \left(a_1^2 - c^2a_3^2\right)x^2 + 2\left(a_1a_2 - c^2a_3a_4\right)xt + \left(a_2^2 - c^2a_4^2\right)t^2.$$

Lai šāda izteiksme varētu būt pareiza jebkurām x un t vērtībām, iekavās ieslēgtajiem koeficientiem labajā pusē jābūt vienādiem ar attiecīgo x un t pakāpju koeficientiem kreisajā pusē:

$$a_1^2 - c^2a_3^2 = 1; \tag{2.4}$$

$$a_1a_2 - c^2a_3a_4 = 0; \tag{2.5}$$

$$a_2^2 - c^2a_4^2 = -c^2. \tag{2.6}$$

No iegūtajiem trijiem vienādojumiem, protams, nevar atrast četrus meklējamos koeficientus, taču mums vēl jāievēro «kustīgās» sistēmas ātrums v. 2.1.*b* attēlā redzams, ka punktā, kur apskatāmajā laika momentā $x'=0$, ir $x=vt$ jeb $v=x/t$. Tāpēc, liekot pirmajā no vienādojumiem (2.3) $x' = 0$, iegūstam $a_1x = -a_2t$ jeb $x/t = -a_1/a_2=v$, no kurienes izriet, ka

$$a_2 = -va_1.$$

Koeficientu noteikšanu vēl var atvieglot, ja ievērojam, ka punktā, kur $x=0$, savukārt $x' = -vt'$. Liekot $x=0$ abos sistēmas (2.3) vienādojumos un dalot pirmo ar otro, var izveidot attiecību $x'/t'=a_2/a_4=-v$. Tātad

$$a_2 = -va_4, \quad \text{t.i.,} \quad a_4 = a_1.$$

Tagad no (2.6) var iegūt $a_1 = a_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}}$. Tad $a_2 = -\frac{\text{v}}{\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}}$, bet no vienādojuma (2.5): $a_3 = -\frac{\text{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}}$.

Ievietojot iegūtās koeficientu izteiksmes izteiksmēs (2.3), iegūst meklētās koordinātu transformāciju formulas, kuras apmierina noteikumu, ka gaismas ātrums ir vienāds visās inerciālās koordinātu sistēmās (gadījumam, kad kustība notiek x-ass virzienā):

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-\text{v}t}{\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-\frac{\text{v}}{\text{c}^2}x}{\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}} \end{aligned}} \qquad (2.7)$$

Šīs formulas sauc par Lorenca koordinātu transformācijām.

Ja kustības ātrums v ir mazs salīdzinājumā ar gaismas ātrumu c, tad saskaitāmos, kas satur attiecību v/c (un vēl jo vairāk tos, kas satur v^2/c^2 vai v/c^2) var neievērot. Tādā gadījumā mēs iegūstam atkal parastās Galileja transformācijas (2.1). No šejienes arī radies viedoklis, ka ar relativitātes teoriju saistītās parādības novērojamas vienīgi tad, ja ir darīšana ar ļoti lieliem kustības ātrumiem. Tomēr, kā redzēsim vēlāk, tas ne vienmēr ir pareizi.

Gadījumā, ja $\text{v}\rightarrow c$, tad saucēja vērtība izteiksmēs (2.7) tiecas uz nulli, bet x' un t' vērtības – neierobežoti pieaug, bet, ja v > c, zemsaknes izteiksme kļūst negatīva, kam vispār nav fizikālas jēgas. Šis apstāklis liek secināt, ka neviens materiāls ķermenis nevar sasniegt gaismas ātrumu vakuumā; ātrums c patiešām ir maksimālais dabā iespējamais ātrums.

Pieraksta saīsināšanai turpmāk lietosim vispār pieņemtus apzīmējumus:

$$\text{v}/c=\beta.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \ ,$$

Ievērosim arī, ka vienmēr $\gamma > 1$, ja $\text{v}\neq 0$.

Tagad formulas (2.7) uzrakstāmas īsāk:

$$x' = (x-\beta ct)\gamma\,; \quad y' = y\,; \quad z' = z\,; \quad t' = (t-x\beta/c)\gamma. \qquad (2.7')$$

vai matricu veidā:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

Šādu matricu reizinājumu izteiksmju (2.7) vietā var izveidot, ja mainīgo t un t' vietā lieto attiecīgi lielumus ct un ct'.

Īsāk (2.8) var uzrakstīt šādi:

$$\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{LX}, \qquad (2.9)$$

kur kolonas matricā (vektorā) $\boldsymbol{X'}$ sakopoti lielumi x', y', z', ct', vektorā $\boldsymbol{X}$ − lielumi x, y, z, ct, bet simetriskajā kvadrātmatricā $\boldsymbol{L}$ − Lorenca transformāciju koeficienti: $l_{11}=\gamma$, $l_{14} = -\beta\gamma$ utt.

2.3. Vektora jēdziens relativitātes teorijā

Koordinātas x, y, z ir attiecīgā telpas punkta rādiusvektora komponentes, bet x', y', z' − šo komponenšu pārveidojums jaunajā koordinātu sistēmā. Parastajos koordinātu pārveidojumos, kā zināms, vektora garums (jeb tā kvadrāts) $r^2=x^2+y^2+z^2$ nemainās. Lorenca transformācijās tas acīmredzami vairs nav spēkā. Taču Lorenca transformācijās nemainīgs paliek lielums

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c'^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 .$$

Šo lielumu s relativitātes teorijā tad arī ir pieņemts saukt par tāda «rādiusvektora» «garumu», kuram atšķirībā no parastā rādiusvektora ir 4 komponentes: x, y, z, ct. Līdz ar to relativitātes teorijā vispār rīkojas ar šādiem četru dimensiju vektoriem (jeb, īsāk, *4-vektoriem*), un visiem šiem 4-vektoriem ir lietojamas transformācijas (2.8). Taču, lai transformētu fiziskos lielumus-vektorus, tie vispirms jāpārveido par 4-vektoriem: jāatrod, kāda katram no tiem ir ceturtā («laika») komponente, tāpat arī 4-vektora telpiskās komponentes, vispār, var tieši nesakrist ar atbilstošā fiziskā vektora telpiskajām komponentēm. 4-vektora komponentēm jābūt tādām, lai tās pilnībā raksturotu attiecīgo fizisko vektoru un 4-vektora «garums» transformācijas rezultātā nemainītos.

Ilustrācijas nolūkā uzrakstīsim dažus biežāk sastopamos 4-vektorus, neiedziļinoties matemātiskajās operācijās, kas noved pie šiem rezultātiem.

Ātrums $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = \gamma\begin{pmatrix} \mathrm{v}_x \\ \mathrm{v}_y \\ \mathrm{v}_z \\ c \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Kustīga ķermeņa impulss $\boldsymbol{p}$, kura masa ir m un ātrums ir $\mathbf{v}$ (m − t.s. miera stāvokļa masa, kas noteikta koordinātu sistēmā, kurā ķermenis ir nekustīgs; par to, vai var lietot arī kādu citu masu, sk. **2.3.4.**):

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m\gamma\begin{pmatrix} \mathrm{v}_x \\ \mathrm{v}_y \\ \mathrm{v}_z \\ c \end{pmatrix} \qquad (2.10')$$

Spēks $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} = \gamma \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c} \end{pmatrix}. \qquad (2.10'')$$

kur $F_{x,y,z}$ ir «paras*tā*» 3-dimensiju spēka komponentes, **Fv** − skalārais reizinājums. **v** − šeit ir ķermeņa kustības ātrums lietotajā koordinātu sistēmā.

Tomēr ne visiem fiziskajiem 3-dimensiju vektoriem ir iespējams atrast tādu ceturto komponenti, lai pārejai uz citu koordinātu sistēmu varētu tieši izmantot Lorenca transformācijas (2.8). Tā, piemēram, atbilstošu ceturto komponenti nevar atrast elektriskā lauka intensitātes vektoram $\boldsymbol{E}$. Par šī vektora pārveidošanos kustīgās koordinātu sistēmās mums būs jārunā atsevišķi.

2.3. Lorenca transformāciju dažas sekas.

2.3.1. Attālumu saīsināšanās.

Ņūtona-Galileja, t.i., «parastajās» koordinātu transformācijās attālumi paliek nemainīgi, taču, kā jau minēts, Lorenca transformācijas attālumus maina.

Atzīmēsim uz divām paralēlām, pagaidām savstarpēji nekustīgām koordinātu asīm x un x' punktus x_1, x_2 un x'_1, x'_2 tā, lai attālumi $\Delta x = x_2 - x_1 = l$ un $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = l$ būtu vienādi. Kas notiek, ja turpmāk šīs koordinātu sistēmas kustas viena attiecībā pret otru ar ātrumu $v = v_x$? Novērotājam, kurš nekustīgi saistīts ar koordinātu asi x', uz šīs ass, protams, nekas nemainās: $\Delta x' = l$, taču koordinātas x'_1, un x'_2 izsakāmas ar x_1 un x_2 vienā un tajā pašā laika momentā t atbilstoši Lorenca transformācijām (2.7') šādi:

$x_1' = \gamma x_1 - \beta ct$ un $x_2' = \gamma x_2 - \beta ct$.

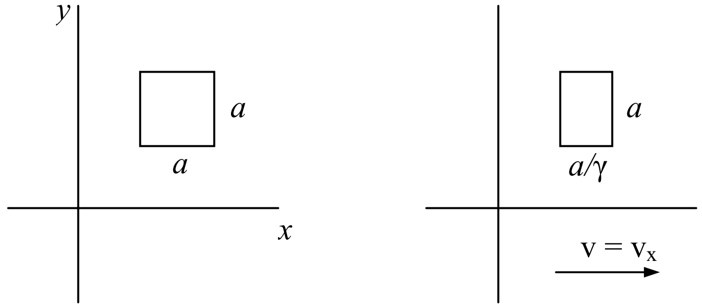
Tad, izveidojot starpību $x'_2 - x'_1$, iegūstam:

$x'_2 - x'_1 = l = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma\Delta x.$

Tā kā $\gamma > 1$, tad $\Delta x < l$.

Tātad novērotājs, kurš kustas attiecībā pret koordinātu sistēmu, kurai pieder x-ass (jeb, kas ir tas pats, attiecībā pret kuru kustas šī sistēma), attālumu Δx novērtēs kā saīsinājušos. Raugoties no otras sistēmas, protams, iegūsim, ka saīsinājies ir attālums $\Delta x'$.

Šim faktam, ka kustīgam novērotājam (salīdzinājumā ar nekustīgu) kustības virzienā vērstie nogriežņi ir saīsinājušies, turpmāk būs būtiska nozīme, lai noskaidrotu, kā kustīgās koordinātu sistēmās pārveidojas elektriskā lauka intensitātes vektors. (Nogriežņi, kas novietoti perpendikulāri kustības virzienam, nemainās.)



2.3. att. Ja nekustīgs novērotājs redz x,y plaknē novietotu kvadrātu, tad novērotājam, kurš kustas paralēli kādai no tā malām, kvadrāts pārvēršas par taisnstūri − kustības virzienam paralēlā mala ir saīsinājusies.

Tā piemēram, ja attiecībā pret koordinātu sistēmu x, y nekustīgs novērotājs redz x, y plaknē novietotu kvadrātu, kura malas ir paralēlas attiecīgi x un y asij, tad novērotājam, kurš kustas paralēli x-asij, šis kvadrāts pārvēršas par taisnstūri (2.3. att.). Attiecīgi samazinās arī figūras laukums. Ja nekustīgajam novērotājam $S = a^2$, tad kustīgajam – $S' = a^2/\gamma$.

2.3.2. Laika ritējuma palēnināšanās.

Bez tikko aplūkotās attālumu saīsināšanās no Lorenca transformācijām izriet, ka dažādās kustīgās koordinātu sistēmās arī laiks rit dažādi. Mūsu turpmākajā izklāstā šo faktu tomēr izmantot nevajadzēs, tādēļ lasītājs šai sadaļai var neveltīt īpašu uzmanību. Tomēr šeit iegūtie rezultāti ir interesanti paši par sevi.

Aplūkosim atkal divas koordinātu sistēmas līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā. Pieņemsim, ka vienā un tajā pašā punktā x laika momentos t_1 un t_2 notiek 2 notikumi. Laika intervāls starp tiem, ko izmēra ar x-asi nekustīgi saistīts novērotājs, ir $\Delta t = t_2 - t_1$. Kustīgā koordinātu sistēmā atbilstošie laika momenti t_1' un t_2' saskaņā ar (2.7') izsakāmi šādi:

$$ct_1' = \gamma ct_1 - \beta\gamma x,$$
$$ct_2' = \gamma ct_2 - \beta\gamma x.$$

Atskaitot no otrās izteiksmes pirmo, iegūstam sakaru starp laika intervāliem $\Delta t' = t_2' - t_1'$ un $\Delta t = t_2 - t_1$ abās koordinātu sistēmās: $\Delta t' = \gamma\Delta t$. Tātad $\Delta t' > \Delta t$. Līdz ar to novērotājam no koordinātu sistēmas x' šķiet, ka sistēmā x, kura kustas attiecībā pret viņu, laiks rit lēnāk – starp vieniem un tiem pašiem notikumiem izmērītais laika intervāls Δt ir mazāks nekā $\Delta t'$.

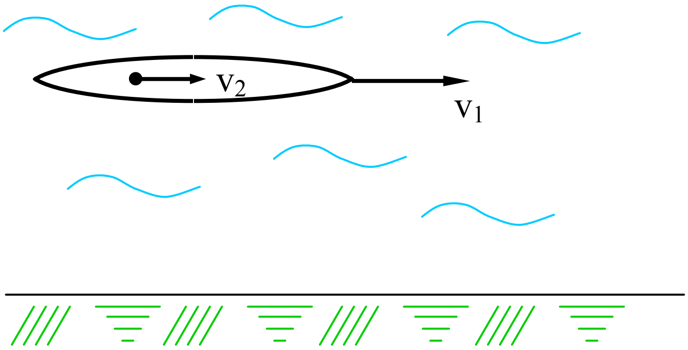
Saprotams, ka arī laika ritējuma palēnināšanās ir relatīva: novērotājam no sistēmas x savukārt šķiet, ka laiks rit lēnāk sistēmā x'.

Speciālās relativitātes teorijas ietvaros, kura pēta tikai vienmērīgu taisnvirziena kustību, nav iespējams noskaidrot, kurā koordinātu sistēmā pulkstenis atpaliek. Lai to izdarītu, abiem novērotājiem būtu jāsatiekas un jāsalīdzina pulksteņu rādījumi, bet tas nav iespējams, ja turpinās novērotāju vienmērīga taisnvirziena kustība. Vispārīgajā relativitātes teorijā, kurā aplūko arī paātrinātu kustību, var parādīt, ka atpaliek tas pulkstenis, kurš vispirms paātrinājās, bet pēc tam kustību nobremzēja un atgriezās pie otra novērotāja. Tātad visai izplatītais zinātniski-fantastisko sacerējumu sižets, ka astronauts, ilgāku laiku ar lielu ātrumu ceļojis kosmiskajā telpā, atgriežoties uz Zemes atklāj, ka te jau ir pagājis daudz lielāks laika periods nekā viņam pašam, ir zinātniski pamatots.

Laika ritējuma maiņai ir arī eksperimentāli pierādījumi. Fizikā ir atklātas tādas daļiņas, kuras eksistē tikai ļoti īsā, stingri noteiktā laika intervālā. Pēc tam tās sadalās citās daļiņās. Taču, ja šāda daļiņa kustas ar milzīgu ātrumu (salīdzināmu ar gaismas ātrumu) attiecībā pret novērotāju, tās «dzīves ilgums» palielinās stingrā saskaņā ar relativitātes teorijas secinājumiem.

2.3.3. Relatīviskais ātrumu saskaitīšanas likums.

Relatīviskais ātrumu saskaitīšanas likums (t.i., likums, kurš ievēro arī relativitātes teoriju) un secinājumi, kādi izriet no tā, būs vajadzīgi turpmākajam izklāstam. Kā mēs redzēsim, tad varēs teikt, ka, pateicoties tieši šim likumam, rodas magnētiskais lauks.



2.4. att. Kuģa ātrums attiecībā pret krastu ir v_1, bet pasažieris kustas ar ātrumu v_2 attiecībā pret kuģi. Kāds ir pasažiera ātrums attiecībā pret krastu?

Pieņemsim, ka pa upi brauc kuģis ar ātrumu v_1 attiecībā pret krastu, bet pa tā klāju braukšanas virzienā iet pasažieris ar ātrumu v_2 attiecībā pret kuģi (2.4. att.). Kāds ir pasažiera ātrums v attiecībā pret krastu?

Ikdienas pieredze mums māca, ka abi ātrumi v_1 un v_2 vienkārši jāsaskaita: $v = v_1 + v_2$. Tomēr relativitātes teorijas secinājumi liek to apšaubīt: katrs no ātrumiem v_1 un v_2 varētu būt lielāks par pusi no gaismas ātruma (protams, ne jau upes kuģim un pasažierim uz tā klāja); tad, vienkārši saskaitot šos lielumus, iegūtu kopējo ātrumu, kas pārsniedz gaismas ātrumu, bet tas, kā zināms, nav iespējams.

Lai iegūtu patieso ātrumu saskaitīšanas likumu, vispirms ievērosim, ka Lorenca transformāciju matricas $\boldsymbol{L}$ (2.8) elementu $l_{11}=\gamma$ un $l_{14} = -\beta\gamma = -\gamma \cdot v/c$ attiecība ir vienāda ar $l_{11}/l_{14} = -c/v$ jeb

$$v = -cl_{14}/l_{11} \qquad (2.11).$$

Tātad, ja izdotos iegūt Lorenca transformāciju matricu $\boldsymbol{L}$, ar kuras palīdzību varētu transformēt 4-vektorus tieši no pasažiera koordinātu sistēmas uz sistēmu, kura nekustīgi saistīta ar krastu, no izteiksmes (2.11) varētu iegūt arī patieso pasažiera ātrumu attiecībā pret krastu.

Paralēli vērstu ātrumu v_1 un v_2 gadījumā šādu matricu iegūt nav grūti. Lai kādu pasažiera koordinātu sistēmā definētu 4-vektoru $\boldsymbol{X}''$ transformētu uz tādas sistēmas koordinātām, kas nekustīgi saistīta ar kuģi, jālieto matrica $\boldsymbol{L}_2$, kurā izmantots ātrums v_2, jo tāds ir pasažiera ātrums attiecībā pret kuģi: $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{L}_2\, \boldsymbol{X}''$. Savukārt, lai tagad kuģa koordinātu sistēmā definēto vektoru $\boldsymbol{X}'$ transformētu uz «krastu», jāizmanto matrica $\boldsymbol{L}_1$, kurā lietots ātrums v_1: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}'$. Ievietojot šeit $\boldsymbol{X}'$ no iepriekšējās izteiksmes, iegūstam

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\, \boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{X}'',$$

kur $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2$. Tātad meklētā matrica ir vienāda ar matricu $\boldsymbol{L}_1$ un $\boldsymbol{L}_2$ reizinājumu:

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & 0 & 0 & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\,.$$

Kā redzams, tad matricas $\boldsymbol{L}$ elements l_{11} ir šāds:

$$l_{11} = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2). \qquad (2.12)$$

(Šo lielumu var saukt arī par summārās kustības koeficientu γ_Σ.) Šeit $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$, $\gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}$, $\gamma_2 = 1/\sqrt{1-\beta_2^2}$. Savukārt

$$l_{14} = -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \qquad (2.13)$$

Tad, ievērojot (2.11), summārās kustības ātrums v atrodams šādi:

$$v = c\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} = \frac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}}. \qquad (2.14)$$

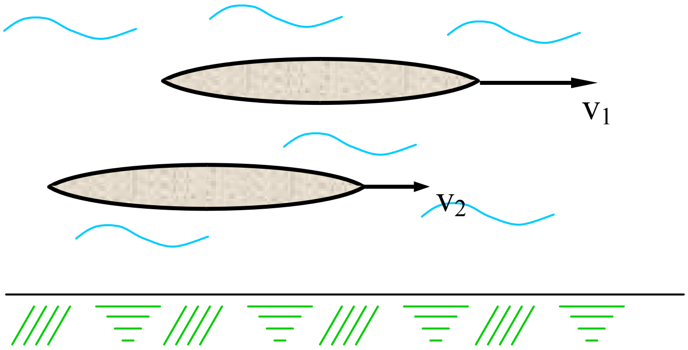
Izteiksme (2.14) ir meklētais relatīviskais ātrumu saskaitīšanas likums (gadījumā, kad ātrumi v_1 un v_2 ir paralēli viens otram).

Kā redzams, tad summārās kustības ātrums patiešām nevar pārsniegt c. Tā, piemēram, ja $v_1 = v_2 = 0{,}5c$, tad $v = \dfrac{c}{1+0{,}25} = 0{,}8c$, bet, ja $v_1 = v_2 = c$, tad arī $v = 2c/2 = c$.

Mazu ātrumu v_1 un v_2 gadījumā (salīdzinājumā ar gaismas ātrumu) no izteiksmes (2.14) aprēķinātais ātrums praktiski neatšķiras no v_1 un v_2 vienkāršas summas. Ja, piemēram, $v_1 = v_2 = 10$ km/s $= 10^4$ m/s (kas tuvojas otrajam kosmiskajam ātrumam 11 km/s; ar tādu ātrumu lidojoša raķete atstāj Zemes orbītu un aizlido Saules sistēmā), tad $v \approx 2\cdot10^4/(1+10^{-9})$ m/s $\approx v_1 + v_2 = 2\cdot10^4$ m/s. No šejienes gribētos secināt, ka lielumu v_1v_2/c^2 (2.14) izteiksmes saucējā «ikdienišķos apstākļos» vienmēr var atmest, neradot praktiski nekādu kļūdu. Tomēr nepārsteigsimies ar šādu secinājumu! Kā redzēsim turpmāk, tad, pateicoties tieši šim lielumam v_1v_2/c^2, «gluži ikdienišķos apstākļos» rodas kustīgu lādiņu magnētiskās mijiedarbības spēks.

Divu kustīgu objektu savstarpējās, relatīvās kustības ātrums atrodams līdzīgi. Aplūkosim gadījumu, kad ir divi kuģi un to ātrumi v_1 un v_2 doti attiecībā pret krastu (2.5 att.). Šajā gadījumā tāpat lietojama izteiksme (2.14), tikai jāmaina zīme vienam no ātrumiem. Tad pirmā objekta (kuģa) ātrums attiecībā pret otro ir

$$v_r = \frac{v_1 - v_2}{1 - \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}.$$



2.4. att. Kuģu ātrumi attiecībā pret krastu ir v_1 un v_2. Kāds ir to savstarpējās, relatīvās kustības ātrums?

Mums turpmāk būs vajadzīgs relatīvās kustības koeficients γ, izteikts ar atsevišķo objektu kustības ātrumiem. Tas iegūstams no (2.12), mainot zīmi viena ātruma priekšā:

$$\gamma_r = \gamma_1\gamma_2(1 - v_1v_2/c^2), \qquad (2.15)$$

kur koeficientos γ_1 un γ_2 lietoti attiecīgi ātrumi v_1 un v_2. Kā redzams, tad γ_r nav atkarīgs no tā, par kura objekta relatīvo ātrumu mēs interesējamies – abos gadījumos (2.15) izteiksmes iekavās ir mīnusa zīme.

2.3.4. Sakars starp masu un enerģiju. Einšteina formula.

Sakarība starp masu un enerģiju mūsu turpmākajam izklāstam nebūs sevišķi svarīga, taču, ja jau vajadzības spiesti esam nonākuši tik tuvu šim fizikā būtiskajam jautājumam, tad aplūkosim arī to.

Atgriezīsimies pie jau agrāk definētā impulsa (kustības daudzuma) 4-vektora (2.10'):

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m\gamma\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ c \end{pmatrix}$$

Kā redzams, tad šī 4-vektora trīs telpiskās komponentes sakrīt ar "parastā" impulsa ($m\mathbf{v}$) komponentēm, reizinātām ar γ. Kāda jēga ir ceturtajai komponentei $p_t = \gamma mc$? Lai to noskaidrotu, izvirzīsim lielumu $p_t c$ pakāpju (Maklorena) rindā pēc mainīgā $\beta^2 = v^2/c^2$:

$$p_t c = \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Tad iegūst

$$p_t\, c = mc^2 + \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{3m\mathrm{v}^4}{8c^2} + \ldots$$

Otrais saskaitāmais šajā izteiksmē ir kustīga ķermeņa kinētiskā enerģija Ņūtona mehānikā. Tātad arī pārējie saskaitāmie šeit interpretējami kā enerģijas. Sākot ar trešo, visi saskaitāmie satur attiecību v^2/c^2 un mazu ātrumu gadījumā ir atmetami. Tie acīmredzot ir kinētiskās enerģijas precizējumi relativitātes teorijā. Taču pirmais saskaitāmais principiāli atšķiras no pārējiem ar to, ka tas nesatur ātrumu v un nav vienāds ar nulli arī tad, ja ķermenis ir nekustīgs. A.Einšteins šo lielumu interpretēja kā ķermenī ar masu *m* esošo enerģijas daudzumu, t.s. miera stāvokļa enerģiju:

$$\boxed{\mathrm{E}_0 = mc^2} \qquad (2.16)$$

Kā pierādījies vēlāk, tad šī interpretācija ir pilnīgi pareiza: atbrīvojot daļu no vielā esošā enerģijas daudzuma, tās masa samazinās, rodas t.s. «masas defekts», kuru var konstatēt, piemēram, atomu kodolreakcijās (citos gadījumos, piemēram, ķīmiskās reakcijās, t.sk. sadegšanas procesos masas defekts ir ap 10^{-10} no reaģējušās masas un to ir grūti konstatēt). Līdz ar to lielums

$$p_t c = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = E \qquad (2.17)$$

ir interpretējams kā kustīga ķermeņa pilnā enerģija *E*, kas bez parastās kinētiskās enerģijas un tās precizējumiem lielu ātrumu gadījumā ietver vēl arī miera stāvokļa enerģiju. Tātad

$$p_t = E/c,$$

t.i., impulsa 4-vektora ceturtā komponente ir vienāda ar pilno enerģiju, dalītu ar *c*.

Lielumu $\dfrac{m}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} = M$ dažkārt interpretē kā no ātruma atkarīgu masu. Tad no (2.17) iegūst $E = Mc^2$, ko savukārt interpretē kā «masas un enerģijas ekvivalenci», jo pilnā enerģija *E* un no ātruma atkarīgā «masa» *M* atšķiras vienīgi ar konstanto reizinātāju c^2.

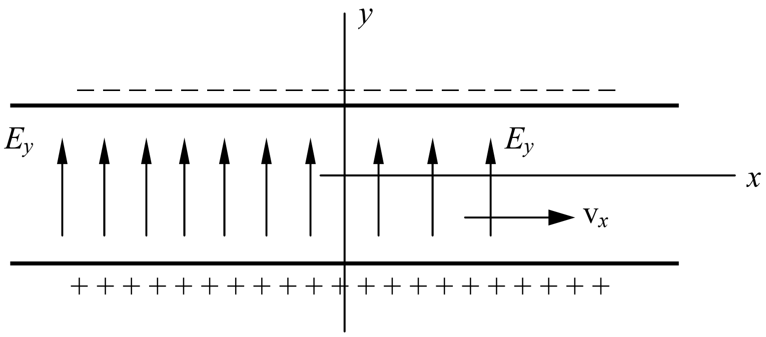
Izpētot šo jautājumu sīkāk, tomēr redzams, ka šāda interpretācija nav pamatota. Lielumu *M* nevar interpretēt kā masu, jo tas nevar kalpot ne kā ķermeņa inerces ne gravitācijas mijiedarbības mērs. Tā, piemēram, relativitātes teorijā var parādīt, ka spēks ***F***, kas darbojas uz kustīgu ķermeni, un tā iegūtais paātrinājums ***a*** vispārīgā gadījumā nemaz nav paralēli viens otram. Tādēļ šāda ķermeņa masu vairs nevar definēt kā spēka un paātrinājuma attiecību, jo dalīšana ar vektoru nav iespējama. Runāt var tikai par «miera stāvokļa masu» *m*, nekādai citai masai nav jēgas.

Pareiza ir Einšteina formula (2.16), kas apgalvo, ka katrai masai piemīt sava enerģija, taču pretējs apgalvojums, ka katrai enerģijai atbilst sava masa, nav pamatots.

3. Magnētiskā mijiedarbība

3.1. Elektrostatiskā lauka pārveidošanās kustīgās koordinātu sistēmās.

Aplūkosim gadījumu, kad telpā ir homogēna elektriskā lauka intensitāte $E = E_y$. Tāds lauks rodas telpā starp liela plakana uzlādēta kondensatora klājumiem, kuri ir paralēli x,z plaknei (3.1. att.). Lādiņi ir savstarpēji nekustīgi un attiecībā pret tiem nekustīgs novērotājs var izmērīt intensitātes lielumu E_y. Kādu intensitātes lielumu izmērīs novērotājs, kurš kustas x-ass virzienā ar ātrumu $\mathrm{v} = \mathrm{v}_x$ telpā starp klājumiem?



3.1. att. Novērotāja kustības virzienam perpendikulārā **E** vektora komponente palielinās, bet paralēlā − nemainās.

Elektrisko lauku kondensatorā rada pozitīvie un negatīvie lādiņi, kas ļoti plānā slānī uzkrājas uz vadošā materiāla klājumu virsmas. Šādus lādiņus raksturo ar lādiņu virsmas blīvumu σ (C/m^2). Saprotams, ka intensitātes E_y lielumu nosaka šis lādiņu virsmas blīvums; E_y ir proporcionāla σ. (Var parādīt, ka mūsu apstākļos $E_y = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$, taču mums šajā gadījumā svarīgi ir tikai tas, ka lielumi E_y un σ ir tieši proporcionāli viens otram.)

Elektriskais lādiņš nav atkarīgs no novērotāja kustības ātruma (lādiņa *invariance*), taču to nevar teikt par lādiņu blīvumu. Novērotājam kustoties x-ass virzienā, saīsinās šajā virzienā vērstie nogriežņi: $\Delta x' = \Delta x/\gamma$ (sk. **2.3.1.** un 2.3. att.). Līdz ar to samazinās arī x,z plaknei paralēlie laukumi, un kustīgā novērotāja noteiktais lādiņu virsmas blīvums σ' ir lielāks nekā nekustīgajam novērotājam: $\sigma' = \gamma\sigma$. Tādēļ kustīgā novērotāja izmērītā intensitāte ir lielāka: $E_y' = \gamma E_y$.

Līdzīgu rezultātu iegūsim arī tad, ja kustība notiek z-ass virzienā (t.i., perpendikulāri 3.1. attēla plaknei), jo tad saīsinās z-ass virzienā vērstie nogriežņi, kas tāpat izraisa uzlādētā laukuma samazināšanos un lādiņu virsmas blīvuma palielināšanos. Turpretī, ja kustība notiek y-ass virzienā (t.i., paralēli elektriskā lauka intensitātes virzienam), E_y lielums nemainās, jo šāda kustība neizraisa uzlādētā laukuma maiņu.

Vispārinot šos secinājumus, varam teikt, ka kustības virzienam paralēlā elektriskā lauka intensitātes komponente nemainās, bet perpendikulārā pieaug (jo, kā zināms, $\gamma > 1$):

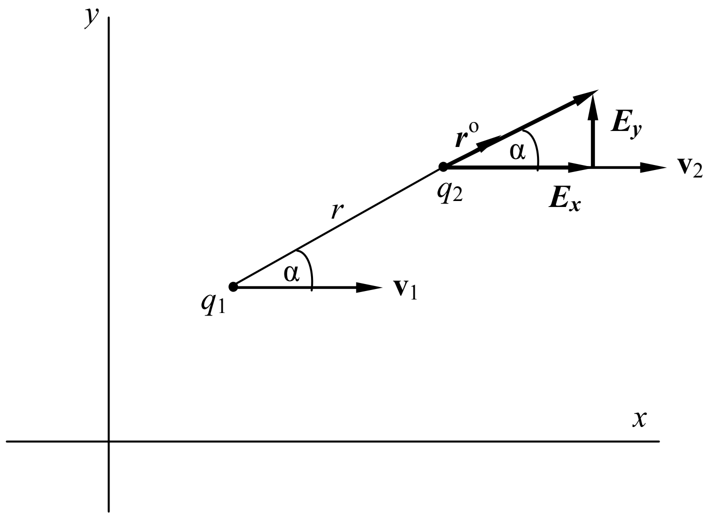
$$\begin{aligned} E_{\parallel}' &= E_{\parallel}\,; \\ E_{\perp}' &= \gamma E_{\perp}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Atzīmēsim tomēr, ka iegūtās elektriskā lauka transformāciju formulas kustīgām koordinātu sistēmām (3.1) nav vispārīgas. Iegūstot tās, mēs pieņēmām, ka ir tāda koordinātu sistēma, kurā visi lauku radošie lādiņi ir nekustīgi. Ja tas tā nav, tad šīs formulas būtiski jāpapildina (sk. **3.4**).

3.2. Kustīgu lādiņu mijiedarbība.

Kulona likums (1.1) nosaka nekustīgu lādiņu mijiedarbības spēku. Aplūkosim tagad, kas mainās, ja lādiņi atrodas kustībā attiecībā pret «nekustīgu» novērotāju.

Pieņemsim, ka divi lādiņi q_1 un q_2 kustas attiecībā pret novērotāju ar ātrumiem v_1 un v_2 (3.2. att.). Pieņemsim arī, ka abi ātrumi ir paralēli x-asij.



3.2. att. Ja abi lādiņi kustas attiecībā pret novērotāju, tad novērotājs bez parastā «Kulona» spēka konstatēs arī magnētiskās mijiedarbības spēka rašanos.

Turpmāk mums būs jārīkojas ar lielumiem, kas izteikti dažādās koordinātu sistēmās. Apzīmēsim ar indeksu 1 lielumus ar pirmo lādiņu nekustīgi saistītā koordinātu sistēmā, ar 2 − sistēmā, kurā nekustīgs ir otrais lādiņš, bet bez indeksa − lielumus novērotāja koordinātu sistēmā.

Lai noteiktu, ar kādu spēku pirmais lādiņš iedarbojas uz otro no nekustīgā novērotāja redzes viedokļa, var rīkoties šādi:

1) jāatrod elektriskā lauka intensitāte $\boldsymbol{E}_1$, kādu pirmais lādiņš rada punktā, kurā atrodas q_2;

2) jātransformē šī intensitāte uz otrā lādiņa koordinātu sistēmu, iegūstot $\boldsymbol{E}_2$;

3) jāatrod spēks $\boldsymbol{F}_2$, kāds darbojas uz otro lādiņu viņa koordinātu sistēmā;

4) jāuzraksta spēka 4-vektors $\boldsymbol{f}_2$ otrā lādiņa koordinātu sistēmā;

5) jātransformē $\boldsymbol{f}_2$ uz «nekustīgo» koordinātu sistēmu, iegūstot 4-vektoru $\boldsymbol{f}$;

6) zinot $\boldsymbol{f}$, jāatrod spēks $\boldsymbol{F}$.

Intensitāte $\boldsymbol{E}_1$ iegūstama no izteiksmes (1.2):

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}} .$$

(Stingri ņemot, šajā izteiksmē būtu jālieto r_1 − attālums starp lādiņiem, izteikts pirmā lādiņa koordinātu sistēmā. Taču turpmāk mēs aprobežosimies tikai ar maziem kustības ātrumiem, kad niecīgo attālumu atšķirību dažādās koordinātu sistēmās var neievērot. Tas pats attiecas arī uz leņķi α, kuru elektriskā lauka intensitāte veido ar x-asi.)

Lai transformētu $\boldsymbol{E}_1$ uz otrā lādiņa koordinātu sistēmu, vispirms sadalām to komponentēs:

$$E_{1x} = \frac{q_1 \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad E_{1y} = \frac{q_1 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2};$$

Tagad transformācijai var lietot izteiksmes (3.1). Komponente E_{1x} ir paralēla kustības ātrumiem, tādēļ tā nemainās − $E_{2x} = E_{1x}$. Taču, transformējot E_y komponenti, tā jāreizina ar koeficientu γ, kurš satur abu lādiņu savstarpējās kustības ātrumu. Šī koeficienta, t.i., γ_r izteiksme ar ātrumiem v_1 un v_2 (2.15) iegūta jau agrāk. Tātad

$$E_{2y} = \gamma_r E_{1y} = \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)E_{1y}.$$

Esam ieguvuši elektriskā lauka intensitāti, kas darbojas uz q_2 ar šo lādiņu nekustīgi saistītā koordinātu sistēmā. Tāpēc spēks nosakāms pēc definīcijas: $\boldsymbol{F}_2 = q_2\boldsymbol{E}_2$ jeb − pa komponentēm:

$$F_{2x} = q_2 E_{2x} = \frac{q_1 q_2 \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \tag{3.2}$$

$$F_{2y} = q_2 E_{2y} = \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)\frac{q_1 q_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} =$$

$$= \gamma_1\gamma_2 \frac{q_1 q_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \gamma_1\gamma_2 \frac{q_1 q_2 v_1 v_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}. \tag{3.3}$$

Lai iegūtu spēka 4-vektoru $\boldsymbol{f}_2$ otrā lādiņa koordinātu sistēmā, jāizmanto izteiksme (2.10"). Šajā izteiksmē $\mathbf{v}$ ir aplūkojamā ķermeņa (mūsu gadījumā − lādiņa q_2) kustības ātrums lietotajā koordinātu sistēmā. Tā kā otrā lādiņa koordinātu sistēmā q_2 ir nekustīgs, tad izteiksmē (2.10") jāliek $v = 0$, $\gamma = 1$. Tātad:

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lai iegūtu spēka 4-vektoru $\boldsymbol{f}$ novērotāja koordinātu sistēmā, var izmantot Lorenca transformācijas matricu veidā (2.8), rādiusvektora komponenšu vietā liekot spēka 4-vektora komponentes, jo transformācijas (2.8) ir pareizas jebkuram 4-vektoram. Koeficientos γ un β jālieto ātrums v_2, jo tas ir otrā lādiņa koordinātu sistēmas ātrums attiecībā pret novērotāju. Tad iegūst:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \\ -\beta_2\gamma_2 F_{2x} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Salīdzinot iegūto $\boldsymbol{f}$ izteiksmi (3.4) ar (2.10"), redzams, ka $\gamma_2 F_x = \gamma_2 F_{2x}$ un $\gamma_2 F_y = F_{2y}$. Tātad spēka komponentes novērotāja koordinātu sistēmā ir šādas:

$$F_x = F_{2x} \qquad \text{un} \qquad F_y = F_{2y}/\gamma_2,$$

t.i., ātrumam paralēlā komponente F_x nav mainījusies, bet, nosakot perpendikulāro komponenti F_y, izteiksmē (3.3) saīsinās γ_2.

Aprobežojoties ar maziem kustības ātrumiem, kad $\gamma_1 \approx 1$, iegūstam šādas spēka komponenšu izteiksmes:

$$F_x = \frac{q_1 q_2 \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad (3.5)$$

$$F_y = \frac{q_1 q_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{q_1 q_2 \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}. \qquad (3.6)$$

Redzams, ka F_x un komponentes F_y pirmais saskaitāmais ir tādi paši kā nekustīgu lādiņu gadījumā. Rodas jautājums − vai izteiksmes (3.6) otrais saskaitāmais mazu ātrumu gadījumā arī nebūtu atmetams tāpat kā γ_1 un tāpat kā leņķa α un attāluma r vietā mēs visu laiku lietojam lielumus no novērotāja koordinātu sistēmas? Šis saskaitāmais taču satur mazu reizinātāju $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2/c^2$, kurš šeit iekļuva no relatīviskā ātrumu saskaitīšanas likuma, no γ_r izteiksmes (2.15).

Patiešām, ja aplūkojam divus kustīgus punktveida lādiņus, tad mazu («ikdienišķu») ātrumu gadījumā izteiksmes (3.6) otrais saskaitāmais ir miljoniem reižu mazāks par pirmo un to nav iespējams izmērīt, kaut arī lādiņi q_1 un q_2 varētu būt visai lieli un otrais saskaitāmais sasniegtu simtus un tūkstošus ņūtonu lielu spēku, ar kādu varētu, piemēram, izkustināt no vietas trolejbusu. Attiecīgi daudzkārt lielāks būtu arī pirmais saskaitāmais.

Tomēr varam iedomāties eksperimentu, kurā otro saskaitāmo ir iespējams izmērīt. Pieņemsim, ka telpā atrodas vēl trešais lādiņš q_3, kurš ir nekustīgs attiecībā pret novērotāju, turklāt $q_3 = -q_1$ un apskatāmajā laika momentā kustīgais lādiņš q_1 atrodas lādiņa q_3 tiešā tuvumā. Tad izteiksmē (3.5) un (3.6) pirmajā saskaitāmajā q_1 vietā jāliek $q_1 + q_3 = 0$. Bet (3.6) otrajā saskaitāmā − vai arī tur q_1 vietā jāliek q_3? Nē! Lādiņš q_3 taču nekustas, uz to neatticas ne v_1 ne v_2! Tātad šādos apstākļos (3.6) pirmā saskaitāmā traucējošā ietekme izzūd, un otro saskaitāmo būtu iespējams izmērīt.

Šādu eksperimentu ar 3 lādiņiem tomēr nav vajadzīgs izdarīt. Dabā pastāv arī tādi apstākļi, kas ir līdzīgi minētā eksperimenta apstākļiem. Elektrovadošajos materiālos − metālos − daļa elektronu (t.s. *vadītspējas elektroni*) var samērā brīvi pārvietoties visā metāla tilpumā, visu laiku paliekot elektriski kompensēti ar nekustīgajiem kristāliskā režģa pozitīvajiem atomu kodolu lādiņiem. Ārēja elektriskā lauka ietekmē vadītspējas elektroni iegūst vairāk vai mazāk izteiktu virzes kustību − rodas *elektriskā strāva*, turklāt kustīgo lādiņu daudzums var būt visai liels. Var novērtēt, ka viens gramatoms metāla satur ap 10^5 kulonu kustīgo negatīvo lādiņu. Tādēļ spēks, ar kādu elektriskā strāva spēj iedarboties uz kustīgu lādiņu vai citu strāvu, var būt visai ievērojams, kaut arī vadītspējas elektronu virzes kustības ātrums parastos apstākļos sasniedz tikai dažus cm/s.

Līdz ar to redzams, ka vispārīgā gadījumā (3.6) izteiksmes otro saskaitāmo tomēr nevar atmest. Turpinot tā izpēti, apzīmēsim to ar F_m un sauksim par *magnētiskās mijiedarbības spēku*:

$$F_\mathrm{m} = -\frac{q_1 q_2 \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}. \qquad (3.7)$$

3.3. Magnētiskais lauks. Magnētiskā lauka indukcijas vektors.

Izteiksme (3.7) iegūta gadījumā, kad abi lādiņi kustas x-ass virzienā. Ja lādiņu zīmes ir vienādas (t.i., $q_1 q_2 > 0$), tad magnētiskās mijiedarbības spēks F_m (kas ir daļa no F_y komponentes (3.6) izteiksmē) vērsts pretēji y-asij; uz to norāda mīnusa zīme (3.7) izteiksmes priekšā. Šis spēks darbojas plaknē, kurā atrodas r (3.2. att.) − īsākais attālums starp lādiņiem.

Šie apsvērumi ļauj uzrakstīt izteiksmi (3.7) vektoriālā formā:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = \frac{q_1 q_2\, \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{r}^{\mathrm{o}})}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}. \qquad (3.8)$$

Lielums $\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ šeit ir vienības vektors, vērsts no punkta, kurā atrodas iedarbības spēku izraisošais lādiņš (q_1), uz punktu, kurā šo spēku meklējam (q_2). Reizinājums $\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ veido vektoru, kas vērsts perpendikulāri 3.2. attēla plaknei virzienā uz skatītāju, bet $\mathbf{v}_2$ vektoriālais reizinājums ar to − vektoru, kas atrodas 3.2. attēla plaknē, vērstu uz leju pretēji y-asij kā to nosaka arī izteiksme (3.6). Vektora $\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ lielums ir $\mathrm{v}_1\sin\alpha$, jo $r^{\mathrm{o}} = 1$, bet $|\mathbf{v}_2\times(\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{r}^{\mathrm{o}})| = \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\sin\alpha$, jo leņķis starp vektoriem $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}$ ir 90^{o} un tā sinuss vienāds ar 1. Tātad izteiksme (3.8) dod to pašu rezultātu, ko (3.7).

Izteiksmi (3.8) vispārina patvaļīgiem lādiņu kustības virzieniem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$.

Šāds vispārinājums var izraisīt iebildumus: vai rezultātu, kas iegūts, aplūkojot lādiņu paralēlu kustību, drīkst vispārināt patvaļīgiem kustības virzieniem? Turklāt izteiksme (3.8) gadījumā, ja vektori $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_1$ nav paralēli viens otram, dod dažādus spēkus, kas darbojas uz pirmo un otro lādiņu, t.i., Ņūtona trešais likums vismaz tā mehāniskajā izpratnē, ka darbība vienāda ar pretdarbību, šeit nav spēkā.

Mēs šeit neiedziļināsimies polemikā, kas saistīta ar šo jautājumu, kā attaisnojumu vispārinājumam minot to, ka tas nerada nekādas pretrunas ar eksperimentu rezultātiem. Gluži otrādi − no izteiksmes (3.8) var matemātiski iegūt rezultātus un matemātiskas sakarības, kuras fizikā bieži postulē tikai kā eksperimentāli konstatētus faktus.

Lai skaidrotu, kā kustīgais lādiņš q_1 var iedarboties uz kustīgo q_2, kurš neatrodas pirmā lādiņa tiešā tuvumā, bet gan attālumā r no tā, ievieš magnētiskā lauka jēdzienu. Saka, ka kustīgs lādiņš (q_1) rada telpā magnētisko lauku, kurš pastāv neatkarīgi no tā, vai ir vēl cits kustīgs lādiņš (q_2), uz kuru tas varētu iedarboties, vai arī tāda nav. Magnētisko lauku katrā telpas punktā raksturo ar *magnētiskā lauka indukcijas vektoru* $\boldsymbol{B}$.

Kustīga punktveida lādiņa radītās magnētiskā lauka indukcijas izteiksmē sakopo (3.8) izteiksmes tos lielumus, kuri attiecas uz lādiņu q_1 un to telpas punktu, kurā nosakām vektoru $\boldsymbol{B}$, atstājot «ārpusē» lielumus, kas raksturo otro lādiņu (q_2 un $\mathbf{v}_2$). Ievieš arī apzīmējumu

$$1/(\varepsilon_0 c^2) = \mu_0.$$

Konstanti μ_0 sauc par *magnētisko konstanti*. Tās lielums ir $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ H/m (henriji uz metru; 1 H = 1 Vs/A).

Tad

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 q_{(1)} (\mathbf{v}_{(1)} \times \boldsymbol{r}^{\mathrm{o}})}{4\pi r^2}. \qquad (3.9)$$

Spēks, kāds darbojas uz kustīgu lādiņu, kurš atrodas magnētiskajā laukā $\boldsymbol{B}$ saskaņā ar (3.8) ir

$$\boldsymbol{F}_{(2)} = q_{(2)}\mathbf{v}_{(2)}\times\boldsymbol{B}. \qquad (3.10)$$

(Indeksi 1 un 2 izteiksmēs (3.9) un (3.10) saskaņoti ar iepriekšējo izklāstu, taču tie likti iekavās, jo ne jau vienmēr lādiņiem būs šādi apzīmējumi. Jāsaprot, ka (3.9) dod kustīga lādiņa radīto magnētiskā lauka indukciju, bet (3.10) − spēku, kāds darbojas uz lādiņu, kurš kustas magnētiskajā laukā $\boldsymbol{B}$.)

No (3.10) var iegūt B mērvienību: N·s/(C·m) = V·s/m^2 = T. Šo vienību sauc par teslu.

Rezultējošais spēks, kas darbojas uz kustīgu lādiņu q elektriskajā laukā ar intensitāti $\boldsymbol{E}$ un magnētiskajā laukā ar indukciju $\boldsymbol{B}$, ir

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B}). \qquad (3.11)$$

Šo spēku sauc par *Lorenca spēku*.

3.4. Elektriskā un magnētiskā lauka transformāciju formulas kustīgās koordinātu sistēmās.

Elektrostatiskā lauka pārveidošanos kustīgās koordinātu sistēmās jau aplūkojām **3.1.** sadaļā. Tur iegūtās formulas (3.1) attiecās uz gadījumu, kad eksistē tāda koordinātu sistēma, kurā visi lādiņi ir nekustīgi, t.i., šie lādiņi ir arī savstarpēji nekustīgi. Ja tas tā nav, tad kustīgie lādiņi izraisa telpā arī magnētisko lauku, kura ietekme jāievēro arī transformāciju formulās. Šo ietekmi var iegūt, izmantojot Lorenca spēka izteiksmi (3.11).

Ja novērotājs ar vienmērīgu ātrumu $\mathbf{v}$ kustas elektriskajā un magnētiskajā laukā, uz viņa koordinātu sistēmā nekustīgu lādiņu darbojas spēks $q(\boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B})$. Taču novērotājam ir pilnīgas tiesības uzskatīt sevi par nekustīgu. Viņš tikai konstatēs, ka elektriskā lauka intensitāte telpā ir $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B}$.

Vektors $\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}$ ir perpendikulārs vektoram $\mathbf{v}$, tāpēc magnētiskā lauka klātbūtne ātrumam paralēlo $\boldsymbol{E}$ vektora komponenti neizmaina, var mainīties tikai ātrumam perpendikulārā komponente. Ja negribam aprobežoties tikai ar maziem kustības ātrumiem, tad transformācijas formulā jāsaglabā arī koeficients γ no (3.1). (Atcerēsimies, ka, orientējoties tikai uz maziem ātrumiem, izteiksmē (3.6), no kuras izrietēja $\boldsymbol{B}$ definīcija (3.9), tika atmests γ_1.) Tādēļ vispārīgā gadījumā

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}\,;\qquad E_{\perp}' = \gamma[E_{\perp} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}]. \qquad (3.12)$$

Nelielu ātrumu gadījumā, kad $\gamma \approx 1$, formulas (3.12) attiecīgi vienkāršojas:

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}\,;\qquad E_{\perp}' = E_{\perp} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}. \qquad (3.12')$$

Lai iegūtu magnētiskā lauka transformāciju formulas, salīdzināsim punktveida lādiņa radītā elektriskā lauka intensitātes un magnētiskā lauka indukcijas izteiksmes (1.2) un (3.9):

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}} \qquad \text{un} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 q(\mathbf{v}\times\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}})}{4\pi r^2}.$$

Redzams, ka ir pareiza šāda sakarība: $\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0(\mathbf{v}\times\boldsymbol{E})$. Šajā izteiksmē $\mathbf{v}$ ir lādiņa kustības ātrums attiecībā pret novērotāju. Transformāciju formulās nepieciešams novērotāja − koordinātu sistēmas kustības ātrums attiecībā pret lauka avotiem, šajā gadījumā − pret lādiņu q. Tas, protams, ir $-\mathbf{v}$. Tādēļ transformāciju formulās pēdējās izteiksmes priekšā jāliek mīnusa zīme. Vektors $\mathbf{v}\times\boldsymbol{E}$, protams, ir perpendikulārs ātrumam, tātad novērotāja kustība elektriskajā laukā var ietekmēt tikai ātrumam perpendikulāro magnētiskā lauka indukcijas komponenti. Ātrumam paralēlā komponente nemainās. Bez tam, nosakot perpendikulāro komponenti, līdzīgi kā elektriskajā laukā lielu ātrumu apstākļos jāievēro arī koeficients γ. (Iztiksim bez šī apgalvojuma pilna pierādījuma.)

Tātad

$$B_{\parallel}' = B_{\parallel}\,;\qquad B_{\perp}' = \gamma[B_{\perp} - \mu_0\varepsilon_0(\mathbf{v}\times\boldsymbol{E})_{\perp}]; \qquad (3.13)$$

jeb mazu ātrumu gadījumā

$$B_{\parallel}' = B_{\parallel};$$
$$B_{\perp}' = B_{\perp} - \mu_o\varepsilon_o(\mathbf{v}\times\boldsymbol{E})_{\perp}. \qquad (3.13')$$

Iegūtās elektriskā un magnētiskā lauka transformāciju formulas mums vēlāk (sk. **6**.nod.) ļaus izdarīt ļoti svarīgus secinājumus par laikā mainīgu elektrisko un magnētisko lauku mijiedarbību. Pagaidām atzīmēsim vienīgi to, saskaitāmais $\mathbf{v}\times\boldsymbol{B}$ formulās (3.12) un (3.12') (t.s. *inducētā elektriskā lauka intensitāte*) praktiski jāievēro gandrīz vienmēr, kad notiek kustība magnētiskajā lauka. Tieši pateicoties šim saskaitāmajam, darbojas, piemēram, elektriskie ģeneratori un transformatori.

Saskaitāmā $\mathbf{v}\times\boldsymbol{E}$ priekšā formulās (3.13) un (3.13') ir reizinātājs $\mu_o\varepsilon_o = 1/c^2$, kas ir ļoti mazs lielums. Tādēļ praksē daudzos gadījumos šo saskaitāmo var neievērot. Tomēr, ja šā saskaitāmā nebūtu, tad nebūtu iespējama elektromagnētisko viļņu rašanās un izplatīšanās.

3.5. Magnētiskā lauka intensitāte.

Galvenais magnētisko lauku raksturojošais lielums ir magnētiskā lauka indukcijas vektors $\boldsymbol{B}$. No tā atkarīgs spēks, ar kādu magnētiskais lauks iedarbojas uz kustīgiem lādiņiem, t. sk. − uz elektriskajām strāvām, kā arī inducētā elektriskā lauka intensitāte $\mathbf{v}\times\boldsymbol{B}$. Magnētisko lauku var radīt kustīgi lādiņi, elektriskā strāva, kā arī *magnetizēta* viela.

Jebkurā vielā ir elementāri magnētiskie momenti; magnētiskais moments (spins) piemīt daudzām elementārdaļiņām, t. sk. elektroniem. Šāda daļiņa rada magnētisko lauku, kas ir līdzīgs noslēgtas strāvas magnētiskajam laukam. Ievietojot vielu ārējā magnētiskajā laukā, elementārie magnētiskie momenti iegūst vairāk vai mazāk izteiktu kopēju orientāciju, viela sāk radīt arī pati savu magnētisko lauku. Vairumam vielu šī kopējā orientācija ir vāji izteikta un tehnikā to var neievērot. Tomēr ir t.s. *feromagnētiskās vielas*, kuras magnetizējas ļoti stipri, un šādas vielas klātbūtne ievērojami pastiprina rezultējošā magnētiskā lauka indukciju.

Vielas spēju magnetizēties raksturo tās *relatīvā magnētiskā caurlaidība* μ. Šādā vielā magnētiskā lauka indukcija ir μ reizes lielāka nekā tā būtu vakuumā, ja ārējie lauka avoti ir vieni un tie paši.

Nereti ir lietderīgi atdalīt ārējo avotu (piemēram, elektrisko strāvu) radīto lauku no rezultējošā lauka. Šajā nolūkā lieto *magnētiskā lauka intensitāti* − vektoru $\boldsymbol{H}$. Neiedziļinoties vielas magnetizācijas procesu niansēs, definēsim šeit

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu\mu_o \quad \text{jeb} \quad \boldsymbol{B} = \mu\mu_o\boldsymbol{H}. \qquad (3.14)$$

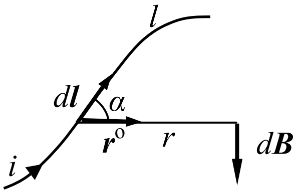
H mērvienība ir A/m, ko var iegūt no (3.14), ievērojot, ka μ ir nenosaukts skaitlis.

4. Elektriskās strāvas magnētiskais lauks

4.1. Bio-Savara-Laplasa formula

Iepriekšējā nodaļā noskaidrojām, ka atsevišķu kustīgu lādiņu magnētiskās mijiedarbības spēks «parastos» apstākļos ir niecīgs salīdzinājumā ar elektriskās mijiedarbības (Kulona) spēku. Pavisam citādi tas ir elektrisko strāvu gadījumā, kad vadītspējas elektronu pārnestais lādiņš var būt visai liels. Kā noteikt strāvas radīto magnētisko lauku?

Aplūkosim vadu l, pa kuru plūst elektriskā strāva ar stiprumu i[*] (4.1. att.). Vada elementa vektora $\boldsymbol{dl}$ virziens sakrīt ar strāvas virzienu, tajā ietvertais kustīgais lādiņš ir dq, kas apskatāmajā telpas punktā rada elementāru magnētiskā lauka indukciju $\boldsymbol{dB}$. Lai noteiktu $\boldsymbol{dB}$, var izmantot (3.9) izteiksmi, aizvietojot tajā q ar dq:



4.1. att. Strāvas elementa $i\boldsymbol{dl}$ radītā magnētiskā lauka indukcija $\boldsymbol{dB}$ ir perpendikulāra plaknei, kurā atrodas $\boldsymbol{dl}$ un attālums r no $\boldsymbol{dl}$ līdz punktam, kurā nosaka $\boldsymbol{dB}$.

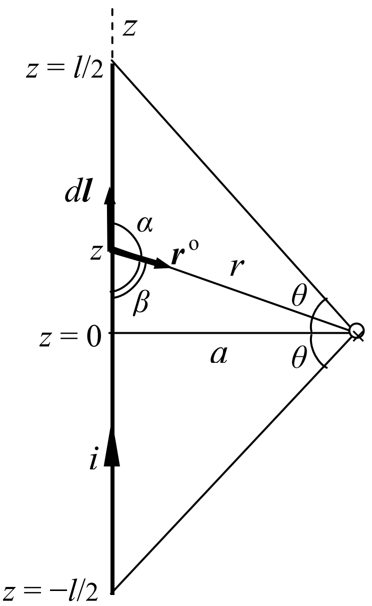
$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_0 (dq\mathbf{v} \times \boldsymbol{r}^0)}{4\pi r^2}.$$

Tā kā $i = dq/dt$ un $\mathbf{v} = dl/dt$, tad

$$dq\mathbf{v} = i\boldsymbol{dl}. \qquad (4.1)$$

Tad iegūst šādu vada elementa $\boldsymbol{dl}$ radīto magnētiskā lauka indukciju:

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_0 i(\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}^0)}{4\pi r^2}. \qquad (4.2)$$



4.2. att. Taisna vada radītā magnētiskā lauka indukcija vērsta perpendikulāri plaknei, kas iet caur vadu un apskatāmo punktu. Ja strāva plūst uz augšu, vektors $\boldsymbol{B}$ vērsts projām no skatītāja.

$\boldsymbol{r}^0$ šeit tāpat kā iepriekš ir vienības vektors, kas vērsts virzienā no lauka avota ($i\boldsymbol{dl}$) uz punktu, kurā meklējam $\boldsymbol{dB}$.

Kā redzams no izteiksmes (4.2), tad vektors $\boldsymbol{dB}$ ir perpendikulārs plaknei, kurā atrodas $\boldsymbol{dl}$ un r, tā vērsums saskaņots ar $\boldsymbol{dl}$ (t.i., strāvas) virzienu atbilstoši «labās skrūves» likumam.

Lai iegūtu kopējo visa vada l strāvas radīto lauka indukciju, izteiksme (4.2) jāintegrē pa šo līniju (l):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_l \frac{(\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}^0)}{r^2}. \qquad (4.3)$$

Šo izteiksmi sauc par Bio-Savara-Laplasa formulu.

Izteiksmes (4.3) ir pareiza vakuumā vai homogēnā vidē, kur $\mu = \text{const}$. Pēdējā gadījumā μ_0 jāaizvieto ar reizinājumu $\mu\mu_0$.

Vispārīgā gadījumā magnētiskā lauka indukcijas $\boldsymbol{B}$ noteikšana, izmantojot (4.3), var būt diezgan sarežģīta. Vektoriālais reizinājums $\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}^0$ jāsadala komponentēs pa koordinātu asīm un katra no tām jāintegrē atsevišķi, tā iegūstot vektora $\boldsymbol{B}$ atbilstošās komponentes. Ar dl apejot visu kontūru l, vispārīgā gadījumā mainās kā attālums r no dl līdz

[*] Strāvas stiprums i, kā zināms no elementārā fizikas kursa, ir vienāds ar lādiņu daudzumu, kas laika vienībā iziet caur vadītāja šķērsgriezumu. To mēra ampēros; 1A= 1C/s.

punktam, kurā nosaka $\boldsymbol{B}$, tā arī leņķis starp vektoriem $\boldsymbol{dl}$ un $\boldsymbol{r}^{\,o}$.

4.2. Taisna vada magnētiskais lauks

Aplūkosim taisnu vadu ar garumu l, pa kuru plūst strāva i (4.2. att.), un noteiksim magnētiskā lauka indukciju punktā, kurš atrodas attālumā a no vada tieši pret tā viduspunktu.

Izmantojot Bio-Savara-Laplasa formulu, vispirms ievērosim, ka, apejot ar $\boldsymbol{dl}$ visu vadu, vektori $\boldsymbol{dl}$ un $\boldsymbol{r}^{\,o}$ visu laiku atrodas vienā un tajā pašā plaknē − tajā, kas iet caur vadu un to punktu, kurā meklējam $\boldsymbol{B}$. Tādēļ visu elementāro vektoru $d\boldsymbol{B}$ virzieni ir vienādi − tie visi ir perpendikulāri minētajai plaknei (t.i., 4.2. attēla zīmējuma plaknei) un vērsti projām no skatītāja kā to nosaka vektoriālā reizinājuma $\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}^{\,o}$ virziens. Līdz ar to pietiek aprēķināt tikai vienu skalāru integrāli.

Ja vads l sakrīt ar z-asi, tad $dl = dz$, $|\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}^{\,o}| = dz\sin\alpha$, $r^2 = a^2 + z^2$. Tā kā $\alpha = 180^0 - \beta$, tad $\sin\alpha = \sin\beta = a/r$. Tad formula (4.2) pārveidojas šādi:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{a\,dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\left.\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\frac{l}{\sqrt{a^2+(\frac{l}{2})^2}}.$$

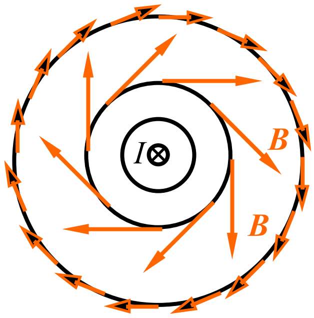
Kā redzams 4.2. attēlā, tad $\dfrac{l/2}{\sqrt{a^2+(\frac{l}{2})^2}} = \sin\theta$, kur θ ir leņķis, ko veido a ar nogriezni, kurš savieno apskatāmo punktu ar vada galu. Tātad

$$B = \frac{\mu_0 i \sin\theta}{2\pi a}. \qquad (4.4)$$

Ja vads ir ļoti garš (teorētiski − bezgalīgi garš), tad $\theta \to 90^0$ un $\sin\theta \to 1$. Tātad bezgalīgi garam vadam

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\, r},} \qquad (4.5)$$

kur ar r apzīmēts attālums no vada līdz punktam, kurā nosaka B.

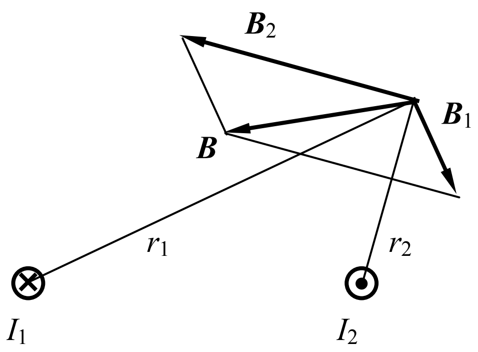


4.3. att. Taisna vada magnētiskā lauka spēka līnijas ir vadam koncentriski riņķi (melnās līnijas). Sarkanie vektori rāda $\boldsymbol{B}$ virzienu. (Pieņemts, ka strāva I plūst virzienā projām no skatītāja.)

Aplūkojot vektoru $\boldsymbol{B}$ punktos, kas atrodas dažādās plaknēs, redzams, ka šis vektors arvien vērsts perpendikulāri īsākajam attālumam no punkta līdz vadam. Tātad taisna vada gadījumā vektora $\boldsymbol{B}$ spēka līnijas ir vadam koncentriski riņķi (jo riņķa līnijas pieskare ir perpendikulāra rādiusam). Uz šīs līnijas turklāt $B = \mathrm{const}$ (jo $r = \mathrm{const}$). Magnētiskā lauka aina taisna vada apkārtnē parādīta 4.3. attēlā.

Arī vispārīgā gadījumā (ja vads nav taisns) spēka līnijas ir noslēgtas, tās nekur nesākas un nebeidzas. Ar to magnētiskais lauks būtiski atšķiras no lādiņu radīta elektriskā lauka, kurā spēka līnijas sākas un beidzas lādiņos.

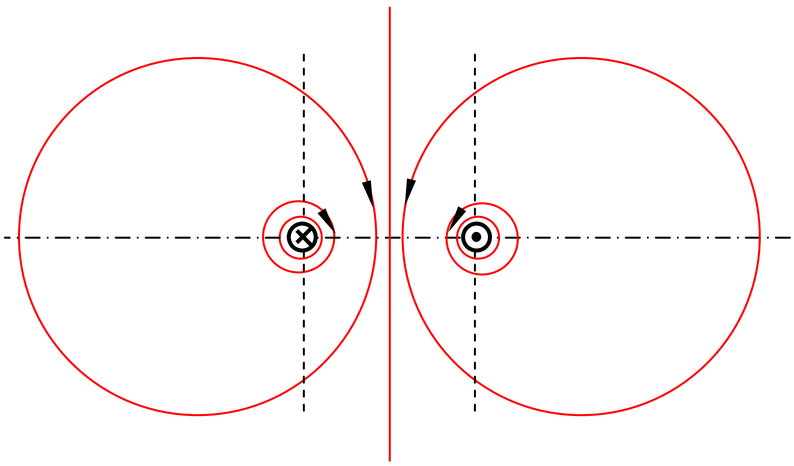
Tāpat kā elektriskā lauka intensitāte arī magnētiskā lauka indukcija pakļaujas superpozīcijas principam. Vairāku magnētiskā lauka avotu (strāvu) radīto kopējo magnētiskā lauka indukciju var iegūt, vektoriāli saskaitot indukcijas vektorus, ko rada katrs avots atsevišķi. Tā, piemēram, ja kopējo magnētisko lauku rada strāvas I_1 un I_2, kas



4.4. att. Divu strāvu radītā kopējā magnētiskā lauka indukcija $\boldsymbol{B}$ atrodama kā atsevišķo strāvu radīto indukciju $\boldsymbol{B}_1$ un $\boldsymbol{B}_2$ vektoriāla summa.

perpendikulāri 4.4. attēla plaknei plūst divos ļoti garos taisnos vados, tad no izteiksmes (4.5) var iegūt lielumus B_1 un B_2 apskatāmajā lauka punktā, ievietojot tajā pārmaiņus attālumus r_1, r_2 un strāvu vērtības I_1, I_2. Tā kā r_1 un r_2 ir atsevišķo strāvu radīto lauku spēka līniju (riņķu) rādiusi, tad vektori $\boldsymbol{B}_1$ un $\boldsymbol{B}_2$ ir perpendikulāri šiem nogriežņiem. Vektoru vērsumu (uz augšu vai leju) nosaka strāvu virzieni vados. 4.4. attēlā pieņemts, ka I_1 plūst projām no skatītāja, bet I_2 – virzienā uz to.

4.5. attēlā parādīta divu garu taisnu vadu kopējā magnētiskā lauka spēka līniju aina, gadījumā, kad strāvas vados ir vienādas, bet plūst pretējos virzienos. (Uz šīm spēka līnijām $B \neq \text{const}$; spēka līnijas pieskares virziens katrā tās punktā sakrīt ar vektora $\boldsymbol{B}$ virzienu, bet vektora lielums spēka līnijas dažādos punktos, vispār, ir dažāds. $B = \text{const}$ uz spēka līnijas tikai atsevišķos gadījumos, piemēram, 4.3. attēlā.)



4.5. att. Divu garu taisnu vadu radītā magnētiskā lauka spēka līniju aina gadījumā, kad strāvas vados ir vienādas, bet plūst pretējos virzienos.

4.3. Mehāniskie spēki magnētiskajā laukā

Izmantojot (3.10) izteiksmi, iespējams noteikt spēku $\boldsymbol{F}$, kāds darbojas uz vadu ar strāvu, ja tas ievietots citas strāvas (vai pastāvīgā magnēta) radītā magnētiskajā laukā $\boldsymbol{B}$.

Tā kā saskaņā ar (4.1) $dq\mathbf{v} = i\boldsymbol{dl}$, tad spēks $d\boldsymbol{F}$, kāds darbojas uz vada elementu $i\boldsymbol{dl}$, ir šāds:

$$d\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{B}.$$

Tad kopējais spēks, kas darbojas uz vadu l, atrodams, integrējot iepriekšējo izteiksmi:

$$\boldsymbol{F} = i\int_l \boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{B}\,. \qquad (4.6)$$

Vispārīgā gadījumā l nav taisna līnija un arī ārējā avota radītā magnētiskā lauka indukcija $\boldsymbol{B}$ mainās telpā no punkta uz punktu. Tad vektoriālais reizinājums $\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{B}$

jāsadala komponentēs pa koordinātu asīm un atsevišķi jānosaka spēka $\boldsymbol{F}$ komponentes.

Vienkāršākajā gadījumā, ja vads ir taisns, bet $\boldsymbol{B} = \text{const}$ (t.i., pēc lieluma un virziena), turklāt vektors $\boldsymbol{B}$ ir vērsts perpendikulāri vadam visos tā punktos, tad (4.6) vienkāršojas:

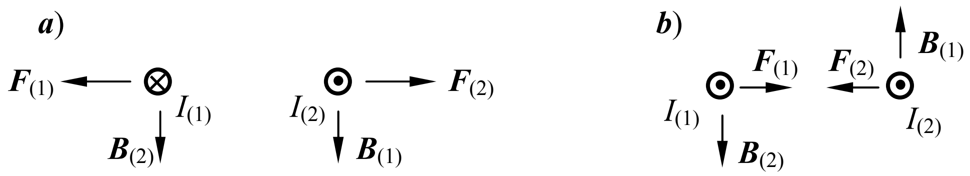
$$F = ilB \tag{4.7}$$

Spēka virzienu nosaka vektoriālā reizinājuma $\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ virziens − spēks ir perpendikulārs kā vadam tā arī ārējam laukam $\boldsymbol{B}$.

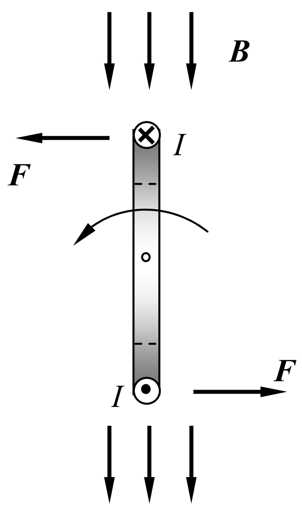
Ja aplūkojam divu taisnu paralēlu vadu mehānisko mijiedarbību, tad redzams, ka pretējos virzienos vērstas strāvas atgrūžas (4.6. att. *a*). Šo rezultātu var vispārināt noslēgtam strāvas kontūram: magnētiskie spēki vienmēr cenšas strāvas kontūru izplēst.

Savukārt vienāda virziena strāvas pievelkas (4.6. att. *b*).

Šo secinājumu varējām izdarīt jau **3.2.** sadaļā, kur, aplūkojot divu lādiņu paralēlu kustību, ieguvām mīnusa zīmi magnētiskās mijiedarbības spēka $F_m = F_y$ (3.7) priekšā. Tas nozīmē, ka kustīgais lādiņš q_1 cenšas tuvināt tādas pat zīmes lādiņu q_2, kas kustas paralēlā virzienā (3.2. att.).



4.6. att. Pretēja virziena strāvas atgrūžas (*a*), bet vienāda − pievelkas (*b*).



4.7. att. Uz noslēgtu strāvas kontūru magnētiskajā laukā darbojas griezes moments, kas cenšas pagriezt kontūra plakni perpendikulāri $\boldsymbol{B}$ virzienam.

Izmantojot līdzīgus apsvērumus, iespējams paskaidrot vienkāršākā līdzstrāvas elektromotora darbības principu. Ja homogēnā (vai aptuveni homogēnā) magnētiskajā laukā ievieto plakanu strāvas kontūru, tad rodas griezes moments, kas cenšas kontūru pagriezt tā, lai tā plakne būtu perpendikulāra $\boldsymbol{B}$ virzienam (4.7. att.). Ja kontūrs nostiprināts uz ass un var griezties ap to, tad inerces dēļ tas kaut nedaudz pagriežas pāri horizontālajam stāvoklim. Tajā momentā jāpārslēdz strāvas virziens kontūrā, līdz ar ko jaunais griezes moments nevis notur kontūru horizontāli, bet gan liek tam turpināt kustību. Tā, attiecīgajos laika momentos pārslēdzot strāvas virzienu, iegūst nepārtrauktu rotāciju.

5. Integrālās sakarības elektriskajā un magnētiskajā laukā

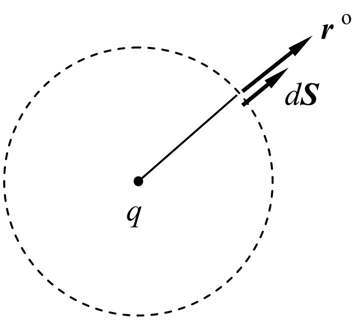
5.1. Gausa teorēma elektriskā lauka intensitātei

Homogēnā vidē ($\varepsilon = \text{const}$) elektriskā lauka intensitāte apmierina Gausa teorēmu: *Summārā vektora **E** plūsma caur jebkuru noslēgtu virsmu ir vienāda ar virsmas aptverto elektrisko lādiņu, dalītu ar $\varepsilon\varepsilon_o$ (jeb vienāda ar nulli, ja virsma lādiņu neaptver)*.

Vektora plūsma caur virsmu ir virsmas integrālis no vektora un virsmas elementa $d\boldsymbol{S}$ skalārā reizinājuma. Tātad Gausa teorēma uzrakstāma šādi:

$$\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_o}, & \text{ja noslēgtā virsma } S \text{ aptver lādiņu } q; \\ 0, & \text{ja virsma S lādiņu neaptver} \cdot \end{cases} \qquad (5.1)$$

Pārliecināsimies par Gausa teorēmas pareizību punktveida lādiņa elektriskajā laukā, ja par noslēgto virsmu izvēlēta lādiņam koncentriska sfēra (5.1. att.). Ievietojot (5.1) punktveida lādiņa elektriskā lauka intensitātes izteiksmi (1.2), iegūst



5.1. att. Punktveida lādiņam koncentriskas sfēras jebkurā punktā vektori $\boldsymbol{r}^o$ un $d\boldsymbol{S}$ ir paralēli un $\boldsymbol{r}^o d\boldsymbol{S} = dS$.

$$\oint_S \frac{q\boldsymbol{r}^o d\boldsymbol{S}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}\oint_S dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_o}.$$

Šeit ievērots, ka q, ε, un arī sfēras rādiuss r ir nemainīgi lielumi, kurus var iznest ārpus integrāļa. Vektori $\boldsymbol{r}^o$ un $d\boldsymbol{S}$ ir paralēli viens otram visos sfēras punktos, tādēļ $\boldsymbol{r}^o d\boldsymbol{S} = r^o dS = dS$. $\oint_S dS$ savukārt vienāds ar visu virsmas laukumu, mūsu gadījumā − ar sfēras laukumu $4\pi r^2$.

Ja lādiņu aptverošā virsma nav koncentriska sfēra, integrālis Gausa teorēmā kļūst daudz sarežģītāks. Mainās attālums r no lādiņa līdz katram virsmas punktam un arī leņķis starp vektoriem $\boldsymbol{r}^o$ un $d\boldsymbol{S}$. Tomēr nav grūti saskatīt, ka Gausa teorēmas pareizība saistīta tikai ar ģeometriju, bet nav atkarīga no elektriskajām parādībām.

Ja Gausa teorēma ir pareiza punktveida lādiņam, kas atrodas sfēriskās koordinātu sistēmas centrā, patvaļīgas virsmas gadījumā, tad, ievietojot (5.1.) izteiksmē $\boldsymbol{E}$ vietā punktveida lādiņa lauka intensitātes izteiksmi (1.2), ar $q/\varepsilon\varepsilon_o$ var saīsināt. Līdz ar to no (5.1) paliek tīri ģeometriska rakstura sakarība:

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}^0 d\boldsymbol{S}}{r^2} = \begin{cases} 4\pi, & \text{ja noslēgtā virsma } S \text{ aptver koordinātu sākumu;} \\ 0, & \text{ja virsma S koordinātu sākumu neaptver.} \end{cases}$$

Šīs sakarības pareizību var matemātiski pierādīt (mēs to šeit nedarīsim).

Nehomogēnā vidē Gausa teorēmu lieto elektriskās indukcijas (nobīdes) vektoram $\boldsymbol{D}$:

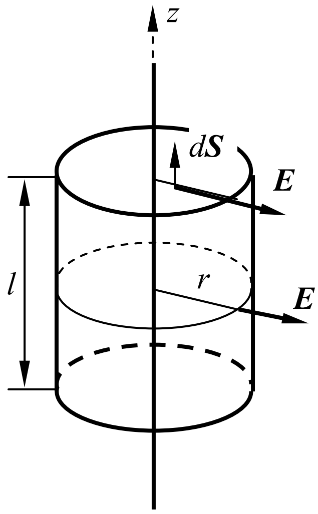
$$\oint_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = q\,. \qquad (5.2)$$

Vispārīgā gadījumā Gausa teorēmu ir grūti izmantot intensitātes $\boldsymbol{E}$ vai vektora $\boldsymbol{D}$ noteikšanai, ja dots lādiņu sadalījums telpā. Meklējamais lielums atrodas zem integrāļa, tādēļ jārisina vairāk vai mazāk sarežģīts integrālvienādojums. Tomēr ir gadījumi, kad (parasti uzdevuma simetrijas dēļ) iespējams atrast tādas integrēšanas virsmas, uz kurām E = const un nemainīgs ir arī leņķis starp vektoriem $\boldsymbol{E}$ un d$\boldsymbol{S}$. Tad E var iznest ārpus integrāļa un izteiksme (5.1) pārvēršas par vienkāršu algebrisku vienādojumu attiecībā pret E.

Viens no šādiem gadījumiem aplūkots nākamajā sadaļā.

5.2. Gara uzlādēta vada elektriskais lauks

Aplūkosim garu (teorētiski − bezgalīgi garu) vadu, vienmērīgi uzlādētu ar lādiņu lineāro blīvumu τ (C/m). Vads novietots sakrītoši ar z-asi cilindriskajā koordinātu sistēmā (5.2. att.).



5.2. att. Gara uzlādēta vada radītā elektriskā lauka intensitāte vērsta radiālā virzienā; tā ir paralēla virsmas elementa vektoram $\boldsymbol{dS}$ uz aptveroša cilindra sānu virsmas, bet perpendikulāra tam − uz galu virsmām.

Ja vadu var uzskatīt par bezgalīgi garu, tad vektors $\boldsymbol{E}$ jebkurā telpas punktā vērsts radiālā virzienā; tas nevar pavērsties uz augšu vai leju, kā arī nevar novirzīties pa labi vai kreisi no radiālā virziena, jo visi punkti, kas atrodas vienādā attālumā r no vada, atrodas vienādos apstākļos. Tātad $E = E_r(r)$. E lielums atkarīgs vienīgi no r; tas nav atkarīgs no cilindriskajām koordinātām z un α.

Par integrēšanas virsmu Gausa teorēmā izvēlēsimies vadam koncentrisku noslēgtu cilindrisku virsmu ar garumu l un rādiusu r. Integrāli pa noslēgto virsmu var sadalīt daļās − pa sānu virsmu un cilindra galu virsmām. Uz sānu virsmas S_s vektors $\boldsymbol{E}$ ir paralēls vektoram $\boldsymbol{dS}$ (kurš, kā arvien, vērsts virsmas normāles virzienā), t.i., $\boldsymbol{EdS} = EdS$, turklāt uz šīs virsmas E = const. Uz galu virsmām E lielums gan ir mainīgs, taču vektori $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{dS}$ ir savstarpēji perpendikulāri; tādēļ uz galu virsmām $\boldsymbol{EdS} = 0$. Ievērojot, ka cilindra sānu virsmas laukums ir $2\pi rl$, bet noslēgtās virsmas aptvertais lādiņš vienāds ar τl, iegūstam

$$\oint_S \boldsymbol{EdS} = \int_{S_s} EdS = E\int_{S_s} dS = E\cdot 2\pi rl = \frac{\tau l}{\varepsilon\varepsilon_0},$$ no kurienes

$$E = E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \qquad (5.3)$$

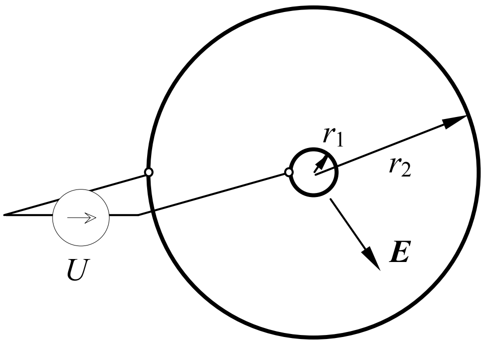
Aplūkojot uzlādēta vada elektriskā lauka ainu plaknē, kas perpendikulāra vadam, redzams, ka tā ir līdzīga 1.2. attēlā parādītajai punktveida lādiņa lauka ainai − lauka intensitāte jebkurā punktā vērsta radiāli projām no pozitīvi uzlādēta vada. Atšķirība ir tā, ka, attālinoties no punktveida lādiņa, E lielums samazinās proporcionāli attāluma kvadrātam ($1/r^2$), kamēr uzlādēta bezgalīgi gara vada gadījumā, kā redzams no (5.3), E dilst lēnāk − proporcionāli attāluma pirmajai pakāpei ($1/r$). Tas arī saprotams − uzlādēta bezgalīgi gara vada gadījumā telpā ir daudz vairāk lādiņa nekā tikai vienā punktā.

Cilindriska kondensatora (koaksiāla kabeļa) kapacitāte. Kondensatoru, kā zināms, veido divi vadoša materiāla ķermeņi, atdalīti ar izolācijas slāni. Pieslēdzot šādu divu ķermeņu sistēmu spriegumam, uz viena no tiem uzkrājas pozitīvs, uz otra − tikpat liels negatīvais lādiņš. Uzkrātā lādiņa q daudzums ir tieši proporcionāls spriegumam U un ķermeņu sistēmas (kondensatora) *kapacitātei* C:

$$q = CU. \qquad (5.4)$$

Kapacitāte ir atkarīga no ķermeņu (kondensatora *klājumu*) lieluma, formas, attāluma starp tiem un izolācijas īpašībām.

Cilindrisku kondensatoru veido apaļš vads un to aptverošs koncentrisks metāla apvalks (5.3. att.).Līdzīgu konstrukciju (*koaksiālu kabeli*) izmanto arī kā divvadu līniju − pa centrālo dzīslu strāva var plūst vienā virzienā, bet pa apvalku − pretējā. Nosakot kapacitāti, starp abām šīm iekārtām nav atšķirības.



5.3. att. Telpā starp koaksiāla kabeļa centrālo vadu un apvalku ***E*** vektors nosakāms tāpat kā viena uzlādēta vada gadījumā.

Vadam koncentriska apvalka klātbūtne neizjauc iepriekš aplūkoto simetriju; tādēļ izvēloties cilindrisko integrēšanas virsmu telpā starp centrālo vadu ar rādiusu r_1 un apvalku, kura iekšējais rādiuss ir r_2, lauka intensitātei iegūsim to pašu izteiksmi (5.3), ko viena vada gadījumā.

Šī izteiksme ir pareiza r maiņas robežās no r_1 līdz r_2. Ja integrēšanas virsmas rādiuss ir izvēlēts lielāks par r_2, tad virsmas aptvertais kopējais lādiņš ir vienāds ar nulli, jo uz klājumiem uzkrājas vienādi pretēju zīmju lādiņi. Simetrija ir saglabājusies, tātad ārējā vidē $\boldsymbol{E} = 0$; bezgalīgi gara kabeļa gadījumā ārējā vidē elektriskais lauks nerodas. Var parādīt, ka, plūstot pa centrālo vadu un apvalku vienādām pretēja virziena strāvām, ārējā vidē nerodas arī magnētiskais lauks. Tātad šāds kabelis nerada traucējums citām iekārtām.

Lai noteiktu kapacitāti, iekārtā ar garumu l uzkrātais lādiņš τl jāsaista ar pieslēgtā avota spriegumu U. To var izdarīt, izmantojot sakarību (1.5), ievietojot tajā E vietā izteiksmi (5.3) un integrējot līnijas integrāli pa rādiusu r robežās no r_1 līdz r_2:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

No šejienes var iegūt kapacitātes izteiksmi:

$$C = \frac{\tau l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}}.$$

Elektropārvades līniju parasti raksturo ar tās kapacitāti uz garuma vienību $C_0 = C/l$. Koaksiāla kabeļa kapacitāte uz garuma vienību tātad ir

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (5.5)$$

Citus piemērus, kur Gausa teorēmu var izmantot elektriskā lauka intensitātes (un, ja vajadzīgs, − pēc tam arī potenciāla sadalījuma) noteikšanai lasītājs var atrast attiecīgajās grāmatās. Vispārīgā gadījumā tomēr elektrostatiska lauka aprēķinos jārisina Laplasa vai Puasona vienādojums potenciālam (sk. **1.4.**), bet pēc tam var noteikt arī intensitāti $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

5.3. Pilnās strāvas likums magnētiskā lauka indukcijai

Noslēgtas strāvas i radītā magnētiskā lauka indukcija apmierina t.s. pilnās strāvas likumu: ja izvēlamies telpā patvaļīgu noslēgtu kontūru L, tad homogēnā vidē (μ = const)

$$\oint_L \boldsymbol{B}d\boldsymbol{L} = \begin{cases} \mu\mu_0 i, & \text{ja integrēšanas kontūrs } L \text{ aptver strāvas } i \text{ kontūru;} \\ 0\,, & \text{ja integrēšanas kontūrs } L \text{ strāvas kontūru neaptver.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Ļoti svarīgs ir noteikums, ka pilnās strāvas likumā jāizmanto magnētiskā lauka indukcija, kuru rada noslēgta strāva. Pretējā gadījumā vispār nav iespējams runāt par to, vai kontūri aptver viens otru, vai neaptver. Tā, piemēram, ar izteiksmi (4.4) noteiktajai galīga garuma taisna vada radītai indukcijai $\boldsymbol{B}$ pilnās strāvas likums nav piemērojams. Turpretī ar izteiksmi (4.5) noteiktā $\boldsymbol{B}$ apmierina (5.6), jo bezgalīgi garā vadā strāvas ceļu var uzskatīt par noslēgtu.

Līdzīgi kā Gausa teorēmas, arī pilnās strāvas likuma pareizība saistīta tikai ar ģeometriju. Ievietojot izteiksmē (5.6) $\boldsymbol{B}$ vietā Bio-Savara-Laplasa formulu (4.3) noslēgtam strāvas kontūram l, ar $\mu\mu_0 i$ izteiksmi var saīsināt (ja $\mu \neq 1$, tas jāraksta arī Bio-Savara-Laplasa formulā). Tad atliek tīri ģeometriska rakstura sakarība

$$\oint_L \left(\oint_l \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^{o}}{r^2} \right) d\boldsymbol{L} = \begin{cases} 4\pi, & \text{ja kontūri } L \text{ un } l \text{ aptver viens otru;} \\ 0\,, & \text{ja kontūri } L \text{ un } l \text{ viens otru neaptver.} \end{cases}$$

Dažādā literatūrā šo likumu sauc dažādi, piemēram, − par Ampēra likumu. Tomēr šķiet, ka nosaukums «pilnās strāvas likums» vislabāk izsaka tā būtību − strāvai jābūt noslēgtai. Šo jautājumu skarsim vēl turpmāk − **6.3.** sadaļā.

Turpinājumā, kad vairs nebūs vajadzīgs aplūkot arī strāvas kontūru, patvaļīgo integrēšanas kontūru pilnās strāvas likumā apzīmēsim ar l, kā to parasti lieto dažādā literatūrā.

Līdzīgi kā Gausa teorēmu arī pilnās strāvas likumu var izmantot B noteikšanai, ja izdodas izvēlēties tādus integrēšanas kontūrus, kuru visos punktos B = const un nemainīgs ir arī leņķis starp vektoriem $\boldsymbol{B}$ un $d\boldsymbol{l}$. Tā var, piemēram, ļoti vienkārši iegūt gara taisna vada strāvas magnētiskā lauka izteiksmi (4.5), neintegrējot Bio-Savara-Laplasa formulu. Par integrēšanas kontūru izteiksmē (5.6) jāizvēlas vadam koncentrisks riņķis (ar rādiusu r), kura visos punktos B = const, jo visi punkti atrodas vienādos apstākļos. Vektora $\boldsymbol{B}$ virziens sakrīt ar riņķa pieskares virzienu. Tad $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{l}$ = Bdl un no (5.5) iegūstam $B\oint_l dl = B \cdot 2\pi r = \mu\mu_0 i$. No šejienes

$$B = \frac{\mu\mu_0 i}{2\pi r}, \quad (5.7)$$

kur r ir apskatāmā punkta attālums no vada. Atšķirībā no (4.5) šeit ievērots, ka vides relatīvā magnētiskā caurlaidība μ var atšķirties no 1.

Izteiksme (5.7) lietojama tikai homogēnā vidē, kur μ = const. Nehomogēnā vidē pilnās strāvas likumu lieto magnētiskā lauka intensitātei H. Tad (5.7) vietā garam taisnam vadam iegūstam vēl vienkāršāku izteiksmi.

$$H = \frac{i}{2\pi\, r}, \quad (5.8)$$

kura, protams, ir pareiza arī homogēnā vidē.

5.4. Magnētiskā plūsma un tās nepārtrauktības princips

Par magnētisko plūsmu Φ caur virsmu S sauc indukcijas vektora plūsmu caur šo virsmu:

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} . \tag{5.9}$$

Magnētiskā plūsma tātad vienmēr saistīta ar kādu konkrētu virsmu, konkrētu laukumu.

Vienkāršākajos gadījumos, kad visos virsmas punktos $B = \text{const}$ un $\boldsymbol{B} \parallel d\boldsymbol{S}$ (t.i., vektors $\boldsymbol{B}$ ir perpendikulārs laukumam), vektoru skalārais reizinājums (5.7) izteiksmē pārvēršas par moduļu reizinājumu, B var iznest ārpus integrāļa, bet integrālis no dS ir vienāds ar laukumu S. Tad

$$\Phi = BS.$$

Vispārīgā gadījumā tomēr jāintegrē izteiksme (5.9).

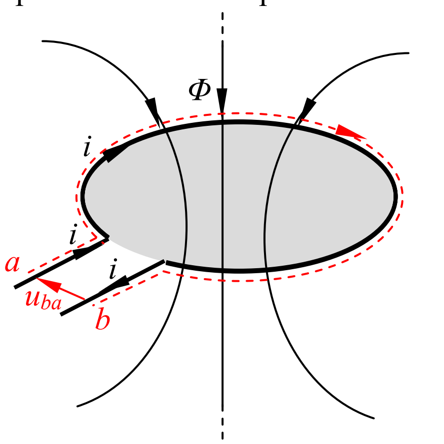
Ļoti svarīga, magnētiskās plūsmas īpašība ir tās nepārtrauktība − Vektora $\boldsymbol{B}$ plūsma caur noslēgtu virsmu ir vienāda ar nulli:

$$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0 .$$

Dabā nav atklāti tādi magnētiskā lauka avoti, kas varētu radīt no kāda punkta vai apgabala pārsvarā izejošas vai ieejošas magnētiskā lauka spēka līnijas. Cik liela magnētiskā plūsma ieiet kādā noslēgtas virsmas ierobežotā apgabalā, tik no tā arī iziet. Elektriskajā laukā līdzīgs virsmas integrālis nebūt nav vienāds ar nulli, ja virsma aptver lādiņus (5.1).

5.5. Induktivitāte un mijinduktivitāte

Ja pa noslēgtu kontūru plūst strāva i, tā rada magnētisko lauku un caur kontūra aptverto laukumu «plūst» noteikta magnētiskā plūsma Φ (5.4. att.), ko sauc arī par kontūra pašindukcijas plūsmu. Šīs plūsmas lielums atkarīgs no daudziem faktoriem − no kontūra laukuma, no apkārtējās vides magnētiskajām īpašībām un, bez šaubām, − no strāvas stipruma, kas plūst kontūrā. Piemēram, palielinot strāvas stiprumu i divas reizes, tikpat reižu pieaugs arī magnētiskā plūsma (vismaz vidē ar lineārām magnētiskajām īpašībām, t.i., ja magnētiskā caurlaidība μ nav atkarīga no magnētiskā lauka intensitātes vai indukcijas). Tātad plūsma Φ ir tieši proporcionāla strāvas stiprumam i: $\Phi = Li$, kur proporcionalitātes koeficientā L «paslēpta» visu pārējo faktoru ietekme uz plūsmu. Šo koeficientu sauc par kontūra *induktivitāti* jeb *pašindukcijas koeficientu*.



5.4. att. Pa noslēgtu kontūru plūstoša strāva rada magnētisko plūsmu Φ (pašindukcijas plūsmu), kas «plūst» caur kontūra aptverto laukumu.

Lai pastiprinātu magnētisko lauku, lieto spoles, kurās viena un tā pati strāva daudzkārtīgi apriņķo apgabalu, kurā jārada magnētiskais lauks. Ja spoles vijumu skaits ir w, aptuveni tikpat daudz reižu lielāka ir arī strāvas radītā magnētiskā plūsma, salīdzinot ar vienkāršu kontūru. Šī plūsma savukārt šķērso visus vijumus (vismaz aptuveni), tāpēc lieto *plūsmas saķēdējuma* jēdzienu

$$\Psi = w\Phi$$

un par spoles induktivitāti sauc *proporcionalitātes koeficientu starp strāvu un tās radīto plūsmas saķēdējumu*:

$$\Psi = Li.$$

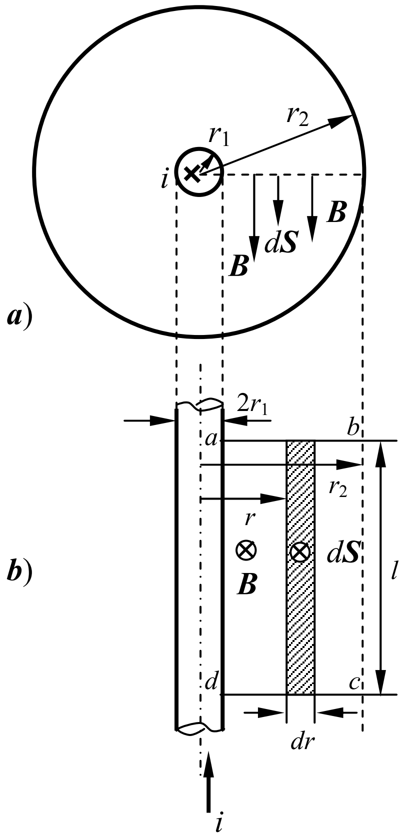
Viegli saprast, ka spoles induktivitāte ir proporcionāla vijumu skaita kvadrātam: palielinot w, tikpat reižu pieaug Φ un vēl tikpat reižu − arī Ψ.

Lai aprēķinātu kāda kontūra vai spoles induktivitāti, jāzina magnētiskā lauka indukcijas vektora $\boldsymbol{B}$ sadalījums telpā, integrējot izteiksmi (5.9) jānosaka magnētiskā plūsma caur attiecīgo laukumu un plūsmas saķēdējums. Tad

$$L = \Psi / i.$$

Strāva i induktivitātes izteiksmē saīsinās, jo no strāvas atkarīga arī $\boldsymbol{B}$, bet no tās − Φ un Ψ.

Koaksiāla kabeļa induktivitāte uz garuma vienību. Kabeļa šķērsgriezums parādīts 5.5. att. *a*. Centrālā vada rādiuss ir r_1, bet apvalka iekšējais rādiuss − r_2. Pieņemsim, ka pa centrālo vadu virzienā projām no skatītāja plūst strāva i. Tāda pat strāva plūst atpakaļ pa apvalku. Lai noteiktu induktivitāti, jāatrod magnētiskā plūsma caur jebkuru virsmu, kas novilkta starp vadu un apvalku. Aprēķins, protams, būs vienkāršāks, ja izvēlēsimies radiālu plakni. Tad magnētiskā plūsma jānosaka caur kvadrāta *abcd* laukumu (5.5. att. *b*), kura platums ir $r_2 - r_1$, bet garums aksiālā virzienā − pagaidām patvaļīgs − l. (Lai nesarežģītu aprēķinu, neievērosim magnētisko plūsmu pašā vadā un apvalkā.)



5.5. att. Telpā starp koaksiāla kabeļa centrālo vadu un apvalku $\boldsymbol{B}$ vektors vērsts perpendikulāri radiālai plaknei tāpat kā viena taisna vada gadījumā.

Magnētiskā lauka indukcija telpā starp vadu un apvalku nosakāma tāpat kā viena taisna vada gadījumā, jo, izvēloties pilnās strāvas likumā par integrēšanas kontūru vadam koncentrisku riņķi, kuram $r_1 < r < r_2$, simetrija saglabājas, bet apvalka strāvu kontūrs neaptver. Tātad

$$B = \frac{\mu\mu_0 i}{2\pi r}.$$

(Ja $r > r_2$, kontūra kopējā aptvertā strāva pilnās strāvas likumā ir vienāda ar nulli, bet simetrija − saglabājusies. Tātad ārpus apvalka $B = 0$. Koaksiāls kabelis nerada ārējā telpā ne elektrisko, ne magnētisko lauku.)

Vektors $\boldsymbol{B}$ ir perpendikulārs rādiusam un tātad arī izvēlētajai virsmai (taisnstūrim *abcd*). Tāpēc magnētiskās plūsmas izteiksmē (5.9) $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = BdS$, taču iznest B ārpus integrāļa šoreiz nevar, jo integrējot pa apskatāmo laukumu, rādiuss r indukcijas B izteiksmē ir mainīgais lielums.

Ievērojot, ka virsmas elements $dS = ldr$, iegūstam:

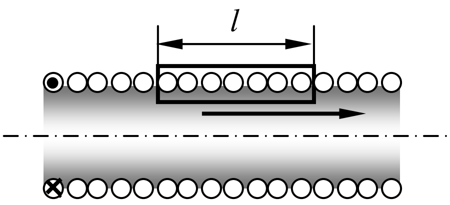
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = \int_S BdS = \frac{\mu\mu_0 il}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 il}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Lai iegūtu induktivitāti, šī izteiksme jādala ar i, bet induktivitātes uz garuma vienību L_0 iegūšanai − arī ar l. Tad

$$L_0 = \frac{\mu\mu_o}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (5.10)$$

Interesanti atzīmēt, ka aplūkotā koaksiālā kabeļa kapacitātes C_0 (5.5) un induktivitātes L_0 (5.10) reizinājums atkarīgs tikai no izolācijas materiāla starp vadu un apvalku īpašībām: $L_0C_0 = \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o$, jo 2π un $\ln(r_2/r_1)$ šādā reizinājumā saīsinās. Ja $\mu = \varepsilon = 1$ (vakuumā, arī gaisā), tad $L_0C_0 = \mu_o\varepsilon_o = 1/c^2$ jeb $\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = c$, kur c − gaismas ātrums. Tā nebūt nav nejaušība. Elektropārvades līniju teorijā pierāda, ka lielums $\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$ ir vienāds ar elektromagnētisko viļņu izplatīšanās ātrumu līnijā.

Garas cilindriskas spoles induktivitāte. Garas (teorētiski − bezgalīgi garas) spoles iekšienē var pieņemt, ka magnētiskais lauks ir homogēns un vektors $\boldsymbol{B}$ vērsts aksiālā virzienā (5.6. att.) atkarībā no strāvas virziena spoles vijumos. Ārpus šādas spoles magnētiskais lauks nerodas.

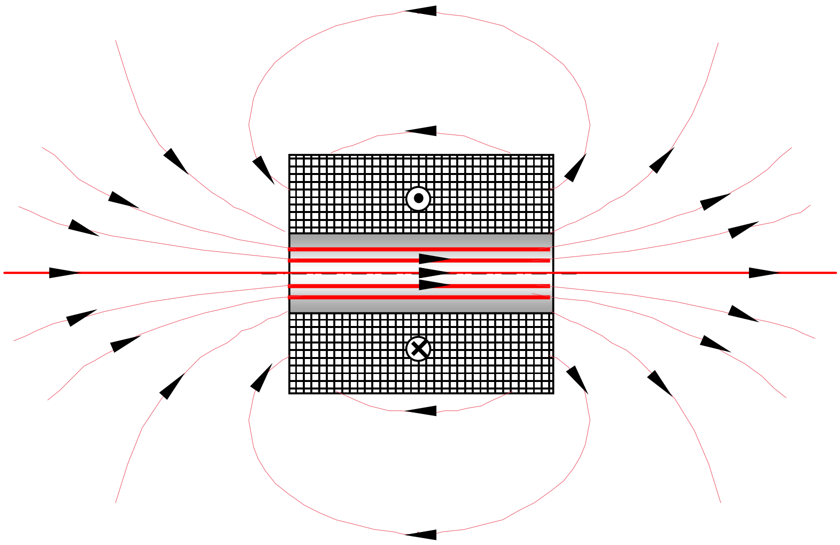


5.6. att. Ja spoli var uzskatīt par bezgalīgi garu, tās iekšienē B=const, bet ārpusē lauka nav.

Izmantojot pilnās strāvas likumu taisnstūrveida kontūram, kura malas garums ir l un ievērojot pieņemtos tuvinājumus, iegūstam $Bl = \mu\mu_o i w_l$, kur i ir spolē plūstošā strāva, bet w_l − spoles posmā ar garumu l ietvertais vijumu skaits. Ja spoles iekšienē $B = \text{const}$, tad $\Phi = BS = \mu\mu_o i w_l S/l = \mu\mu_o i w_o S$, kur $w_o = w_l/l$ ir vijumu skaits uz garuma vienību. Plūsmas saķēdējums spoles posmā, kura garums ir l: $\Psi_l = \Phi w_l = \mu\mu_o i w_l w_o S$. Tā kā $w_l = w_o l$, tad $\Psi_l = \mu\mu_o i w_o^2 S l = \mu\mu_o i w_o^2 V$, kur V ir spoles posma l tilpums. Līdz ar to induktivitātei iegūstam šādu izteiksmi:

$$L = \Psi/i = \mu\mu_o w_o^2 V.$$

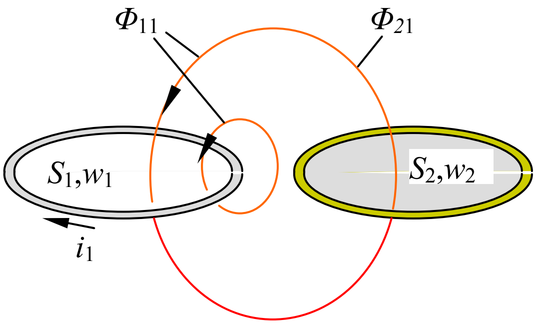
Galīga garuma spolei pēdējā formula lietojama gan tikai ļoti aptuvenam induktivitātes aprēķinam, jo pieņēmums, ka ārpus spoles magnētiskais lauks nenokļūst, tādā gadījumā nav pamatots. Galīga garuma cilindriskas spoles aptuvena magnētiskā lauka spēka līniju aina parādīta 5.7. attēlā.



5.7. att. Cilindriskas spoles magnētiskā lauka aina

Mijindukcija (savstarpējā indukcija). Ja 5.4. attēlā parādītā strāvas kontūra tuvumā atrodas vēl otrs kontūrs, tad daļa no pirmā kontūra radītās magnētiskās plūsmas nokļūst arī otrajā (5.8. att.). Kā redzēsim 6. nodaļā (un zinām arī no fizikas kursa), tad laikā mainīga magnētiskā plūsma izraisa (inducē) otrajā kontūrā elektrodzinējspēka rašanos. Šo parādību sauc par mijindukciju jeb savstarpējo indukciju. Tās pamatā ir tas, ka viena kontūra (spoles) radītā magnētiskā plūsma daļēji nonāk arī otrā kontūrā (spolē).

5.8. attēlā simboliski ar divām plūsmas līnijām attēlota visa magnētiskā plūsma Φ_{11}, ko rada pirmajā kontūrā (vai spolē ar vijumu skaitu w_1) plūstošā strāva i_1, bet ar vienu līniju − tā daļa no Φ_1, kas iziet arī caur otrā kontūra (vai spoles ar vijumu skaitu w_2) laukumu S_2; tā apzīmēta ar Φ_{21} un to sauc par *mijindukcijas* vai *savstarpējās indukcijas* plūsmu. Pirmais indekss apzīmējumā parāda kontūru (spoli), ar kuru Φ_{21} ir saķēdēta, bet otrais − strāvu, kura šo plūsmu rada.



5.8. att. Ja daļa no vienas spoles (kontūra) radītās magnētiskās plūsmas nokļūst otrā spolē (kontūrā), saka, ka spoles ir induktīvi saistītas.

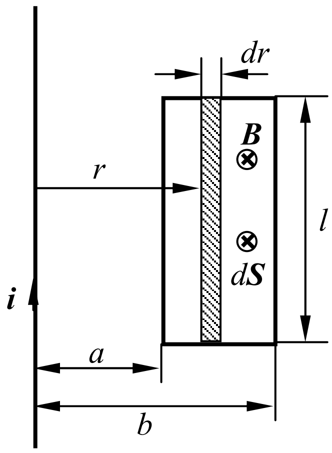
Par *mijinduktivitāti M* (arī − par *savstarpējo induktivitāti* vai *savstarpējās indukcijas koeficientu*) sauc mijindukcijas plūsmas saķēdējuma attiecību pret strāvu, kas šo plūsmu rada. Var pierādīt (mēs to šeit nedarīsim), ka šī attiecība nav atkarīga no tā, pa kuru no divām spolēm (kontūriem) plūst strāva. Līdz ar to M var noteikt divējādā veidā:

$$M = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2}. \qquad (5.11)$$

(Strāva i_2, kā arī plūsma Φ_{12} 5.8. attēlā nav parādīta.) Praktiskos aprēķinos jāpieņem, ka strāva plūst tajā kontūrā, kura radīto magnētisko lauku ir vieglāk noteikt.

Mijinduktivitāte M ir atkarīga no spoļu savstarpējā novietojuma telpā (ja spoles atrodas tālu viena no otras, $M \approx 0$), no apkārtējās vides magnētiskajām īpašībām un abu spoļu vijumu skaita reizinājuma.

Taisna vada un taisnstūrveida spoles mijinduktivitāte. 5.9. attēlā parādīts taisnstūrveida spoles, kuras vijumu skaits ir w, un gara taisna vada savstarpējais novietojums. Aplūkosim gadījumu, kad vads un spole atrodas vienā plaknē.



5.9. att. Taisna vada un taisnstūrveida spoles mijinduktivitātes noteikšana.

Lai noteiktu mijinduktivitāti M, protams, lietderīgi ir pieņemt, ka strāva plūst pa vadu un meklēt magnētisko plūsmu caur spoles aptverto laukumu S

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}.$$

Ja vads un spole atrodas vienā plaknē, tad vektors $\boldsymbol{B}$ ir perpendikulārs laukumam un $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = BdS$ jebkurā laukuma punktā.

Taisna vada radītā magnētiskā lauka indukcija ir

$$B = \frac{\mu\mu_0 i}{2\pi r},$$

bet virsmas elements dS mūsu gadījumā uzrakstāms kā $dS = ldr$. Integrēšana jāizdara, mainot virsmas elementa (iesvītrotais taisnstūris 5.9. attēlā) attālumu līdz vada centram r robežās no a līdz b. Tad

$$\Phi = \int_S BdS = \frac{\mu\mu_0 il}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

un

$$M = \frac{\mu\mu_0 wl}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Iegūtā M izteiksme, kā redzams, ir līdzīga koaksiāla kabeļa induktivitātes izteiksmei (5.10), jo arī tur bija jānosaka magnētiskā plūsma caur taisnstūrveida laukumu, kas atrodas vienā plaknē ar centrālo vadu.

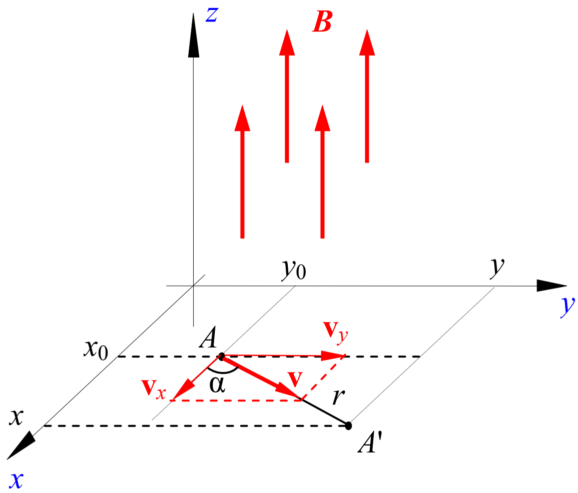
6. Laikā mainīgu elektrisko un magnētisko lauku mijiedarbība

6.1. Mainīga magnētiskā lauka ietekme uz elektrisko lauku.

Līdz šim neesam interesējušies par to, kas notiek, ja elektriskais vai magnētiskais lauks mainās laikā, taču procesiem, kas rodas šādos gadījumos, ir ļoti liela teorētiska un praktiska nozīme.

Atceroties elektriskā un magnētiskā lauka transformāciju formulas kustīgās koordinātu sistēmās (3.12), viegli saprast, ka magnētiskā lauka indukcijas maiņa laikā radīs arī elektrisko lauku. Aplūkosim gadījumu, kad telpā pastāv laikā mainīgs homogēns magnētiskais lauks $B = B_z(t)$ (6.1.att.), ko izraisa laikā mainīga elektriski kompensētu lādiņu kustība (elektriskās strāvas). Nekādu nekompensētu lādiņu tuvumā nav.

Novērotājs, kurš konstatējis magnētiskā lauka maiņu, tomēr nevar atšķirt, vai to izraisa lauka avoti, vai arī varbūt viņš pats kustas ar ātrumu **v** laikā nemainīgā, bet nehomogēnā magnētiskajā laukā. Pēdējā gadījumā atbilstoši formulām (3.12) viņam jākonstatē arī elektriskā lauka intensitātes $\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}$ rašanās. Taču dabas likumi ir vienādi visās inerciālās koordinātu sistēmās un, ja vienā no tām ir radusies elektriskā lauka intensitāte, tai jābūt arī citās. Tātad magnētiskā lauka maiņa laikā neatkarīgi no iemesla, kādēļ tā notiek, viennozīmīgi izraisa arī elektriskā lauka (t.s., *inducētā* elektriskā lauka) rašanos.



6.1. att. Nav iespējams atšķirt, vai novērotāja konstatēto magnētiskā lauka maiņu izraisa lauka avotu (strāvu) maiņa laikā, vai paša novērotāja kustība nehomogēnā laukā.

Lai noteiktu inducētās elektriskā lauka intensitātes $\boldsymbol{E}$ sakaru ar funkciju $\boldsymbol{B}(t)$ (mūsu gadījumā pagaidām $B = B_z$), patiešām varam pieņemt, ka notiek kustība nehomogēnā magnētiskā laukā. Pieņemsim, ka punkts A, kurā atrodas novērotājs, kustas ar vienmērīgu ātrumu $\mathbf{v} = \boldsymbol{x}^o \mathrm{v}_x + \boldsymbol{y}^o \mathrm{v}_y$, t.i.– paralēli x, y-plaknei. (6.1. att. pieņemts, ka kustība notiek tieši šajā plaknē). Ievērot arī iespējamo ātruma komponenti v_z nav vajadzīgs, jo tā vektoriālajā reizinājumā ar B_z dos nulli. Laika atskaitīšanas sākuma momentā (t =0) p. A koordinātas ir x_0, y_0, bet līdz momentam t punkts A noiet attālumu $r = \mathrm{v}t$ un nonāk punktā A' ar koordinātām x,y.

Lai kustīgais novērotājs iegūtu tādu pašu B_z maiņu laikā kā «nekustīgais», magnētiskajam laukam jāmainās atkarībā no r: $B_z = B_z(r/\mathrm{v})$, t.i., funkcijā $B_z(t)$ laika t vietā jāievieto r/v.

Inducētā elektriskā lauka intensitāte ir

$$\boldsymbol{E} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{x}^o \mathrm{v}_x + \boldsymbol{y}^o \mathrm{v}_y) \times \boldsymbol{z}^o B_z = -\,\boldsymbol{y}^o \mathrm{v}_x B_z(r/\mathrm{v}) + \boldsymbol{x}^o \mathrm{v}_y B_z(r/\mathrm{v}).$$

(Lai nesarežģītu spriedumus, mēs šeit relatīviski precīzo formulu (3.12) vietā lietojam vienkāršotās izteiksmes (3.12'). Gala rezultāts no tā nav atkarīgs; to pašu iegūtu, arī izmantojot precīzās izteiksmes.)

Tātad šajā gadījumā (t.i., kad $B = B_z$) rodas elektriskā lauka intensitāte ar komponentēm

$$E_x = \mathrm{v}_y B_z(r/\mathrm{v}) \qquad (6.1)$$

un

$$E_y = -\,\mathrm{v}_x B_z(r/\mathrm{v}). \qquad (6.2)$$

Izteiksmes (6.1) un (6.2) satur patvaļīgi pieņemto ātrumu v, no kura jāatbrīvojas. To var izdarīt, izveidojot komponenšu E_y un E_x atvasinājumu starpību $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}$.

No (6.2) iegūstam

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\,\mathrm{v}_x \frac{\partial B_z\left(\frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{\partial\left(\frac{r}{\mathrm{v}}\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} \cdot \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

Šeit ievērots, ka $r/\mathrm{v} = t$.

Līdzīgi no (6.1):

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}} \cdot \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}.$$

Tad

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\left(\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}\right) \frac{\partial B_y(t)}{\partial t}.$$

Tā kā (6.1. att.) $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,

tad $\partial r/\partial x = (x - x_0)/r$ un $\partial r/\partial y = (y - y_0)/r$.

Līdz ar to

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\left(\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} \cdot \frac{x - x_0}{r} + \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}} \cdot \frac{y - y_0}{r}\right) \frac{\partial B_z(t)}{\partial t}.$$

6.1. attēlā redzams, ka $\mathrm{v}_y/\mathrm{v} = (y - y_0)/r = \sin\alpha$ un $\mathrm{v}_x/\mathrm{v} = (x - x_0)/r = \cos\alpha$. Tātad iepriekšējā izteiksmē iekavās izveidojas summa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Līdz ar to no ātruma v un tā komponentēm esam atbrīvojušies, iegūstot

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \qquad (6.3)$$

Izmantojot tikai izteiksmi (6.3), inducēto elektriskā lauka intensitāti nav iespējams viennozīmīgi noteikt, kaut arī funkcija $\partial B_z/\partial t$ būtu zināma, jo (6.3) ir parciālais diferenciālvienādojums, turklāt ar diviem nezināmajiem lielumiem. Tomēr šī izteiksme skaidri parāda, ka *laikā mainīgs magnētiskais lauks rada telpā arī elektrisko lauku.*

Ja vektoram $\boldsymbol{B}$ ir arī citas komponentes (B_x, B_y), atbilstoši mainīsies arī $\boldsymbol{E}$ komponentes un to atvasinājumi. Vajadzīgās izteiksmes var viegli iegūt no (6.3), vienkārši pārsaucot koordinātu asis. Tā, piemēram, ja z-asi nosauktu par x-asi, tad x pārvērstos par y, bet y – par z-asi. (Simboliski to var attēlot šādi: $x \to y \to z \to x$.). Tātad

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \qquad (6.3')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \qquad (6.3'')$$

Reizinot katru no izteiksmēm (6.3, 6.3', 6.3") ar vektora **B** komponentei atbilstošo vienības vektoru un saskaitot tās, labajā pusē iegūsim summārā vektora **B** atvasinājumu pēc laika, bet kreisajā – jaunu vektoru, kura komponentes izteiktas ar vektora **E** komponenšu parciālajiem atvasinājumiem atbilstoši izteiksmēm (6.3), (6.3') un 6.3"). Šāds vektors, kura komponentes ir cita (dotā) vektora komonenšu parciālo atvasinājumu līdzīga kombinācija, matemātiskās fizikas vienādojumos rodas samērā bieži; tādēļ tam lieto saīsinātu apzīmējumu rot, mūsu gadījumā rot**E** (*rotors* no **E**; angļu valodā rakstītajā literatūrā curl**E**.).

Tātad esam ieguvuši vienādojumu

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{6.4}$$

kur Dekarta koordinātu sistēmā

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}^{\circ}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{y}^{\circ}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{z}^{\circ}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right). \tag{6.5}$$

(Operācijas rot apzīmējumu lieto arī citās koordinātu sistēmās, tikai tās izteiksme katrā koordinātu sistēmā ir sava. Vektora **F** rotora izteiksmi var iegūt arī, reizinot **F** vektoriāli ar simbolisko vektoru ∇: rot $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}$.)

Izteiksme (6.4) turpmāk tiks iekļauta elektrodinamikas kopējā vienādojumu sistēmā kā viena no galvenajām sakarībām. Mēs to sauksim par Maksvela otro vienādojumu.

6.2. Faradeja elektromagnētiskās indukcijas likums.

No elektriskā lauka transformāciju formulām iegūtā izteiksme (6.4) ļauj matemātiski pierādīt vienu no elektrotehnikas praksei vissvarīgākajiem likumiem − Faradeja elektromagnētiskās indukcijas likumu.

Matemātikā ir zināma t. s. Stoksa teorēma, kas ir pareiza jebkurā vektoru laukā

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{F}d\boldsymbol{l}\,.$$

Šeit l ir patvaļīgs noslēgts kontūrs, bet S – šī kontūra jebkura aptvertā virsma (vai otrādi – S ir jebkura virsma, bet l – to aptverošais noslēgtais kontūrs).

Integrēsim izteiksmes (6.4) abas puses pa kādu laukumu S . Tad, izmantojot Stoksa teorēmu, iegūst:

$$\oint_l \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{6.6}$$

kur Φ ir magnētiskā plūsma, kas iziet caur izvēlēto laukumu S, bet l – šo laukumu aptverošais kontūrs. Kontūra apiešanas virziens saskaņots ar plūsmas virzienu pēc «labās skrūves» likuma.

Izteiksmi (6.6) sauc par Faradeja elektromagnētiskās indukcijas likumu.

Angļu fiziķis M. Faradejs izteiksmei (6.6) analogas sakarības ieguva ap 1830.g. rūpīgu un ilgstošu eksperimentu rezultātā. Arī šodien fizikā šo likumu tradicionāli bieži pasniedz kā empīrisku likumu. Tagad redzams, ko to iespējams matemātiski iegūt, izmantojot relativitātes teorijas secinājumus, kas Faradeja laikā, protams, vēl nebija zināmi.

Faradeja likumam vai, pareizāk, tiem fizikālajiem procesiem, kurus apraksta šis likums, ir ļoti liela praktiska nozīme. Tikai pateicoties tam darbojas mūsdienu elektriskie ģeneratori, transformatori un daudzas citas elektrotehniskās iekārtas.

Līnijas integrāli no $\boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$ pa noslēgtu kontūru jau rakstījām, aplūkojot elektrostatisko lauku (1.6). Tur šāds integrālis bija vienāds ar nulli. Izteiksme (6.6) uzskatāma par (1.6) pierādījumu: statiskā laukā, kad nekas atkarībā no laika nemainās, protams, $\partial\Phi/\partial t = 0$. Turpretī mainīgā magnētiskajā laukā plūsmu aptverošajā kontūrā inducējas *elektrodzinējspēks e* (EDS). Ja kontūru veido vadoša materiāla vads, inducētā elektriskā lauka intensitāte radīs tajā lādiņu plūsmu − elektrisko strāvu.
Īsāk Faradeja likumu raksta šādi:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (6.7)$$

kur e ir inducētais elektrodzinējspēks kontūrā, kurš aptver plūsmu. (Tā kā izteiksmē (6.7) telpas koordinātu vairs nav, parciālā atvasinājuma vietā varam rakstīt parasto.)

Mīnusa zīme (6.6) un (6.7) izteiksmē izsaka t.s. Lenca jeb *elektromagnētiskās inerces* principu. Ar (6.6) vai (6.7) noteiktā inducētā EDS virziens sakrīt ar kontūra apejas virzienu, kuru savukārt nosaka plūsmas (jeb vektora $\boldsymbol{B}$) virziens. Taču EDS skaitliskās vērtības zīme atkarīga arī no tā, kā mainās plūsma Φ. Ja tā pieaug, tad atvasinājums $\partial\Phi/\partial t$ ir pozitīvs, bet, plūsmai samazinoties, tas kļūst negatīvs. Ja kontūru l veidotu elektrovadoša materiāla vads, tad, pateicoties mīnusa zīmei (6.6) izteiksmē, plūsmai pieaugot, vadā inducētos strāva, kuras virziens ir pretējs apejas virzienam. Šāda virziena strāva censtos radīt magnētisko lauku, pretēju Φ virzienam, t.i., strāva censtos kavēt Φ pieaugšanu. Turpretī, ja Φ samazinās, tad inducētās strāvas magnētiskais lauks censtos uzturēt iepriekšējo magnētisko pūsmu. Īsāk − inducētā strāva vienmēr cenšas uzturēt iepriekšējo stāvokli − kavēt plūsmas maiņu neatkarīgi no tā, vai Φ pieaug, vai samazinās.

Līdzīgu parādību mehānikā sauc par inerci. Lai iekustinātu materiālu ķermeni, tam jāpieliek ārējs spēks, bet iekustināts ķermenis cenšas saglabāt kustību (Ņūtona 1. likums). Gluži tāpat, lai radītu strāvu un magnētisko lauku spolē, jāpieliek ārējs avots inducētā EDS pārvarēšanai, bet strāva, ja tā radīta, var izzust tikai pakāpeniski, magnētiskā laukā uzkrātajai enerģijai pārveidojoties siltumā elektriskās pretestības dēļ.

Inducētais elektriskais lauks būtiski atšķiras no elektrisko lādiņu radītā lauka ar to, ka inducētā lauka spēka līnijas ir noslēgtas līdzīgi kā spēka līnijas magnētiskajā laukā.

Sakarība starp strāvu un spriegumu spolē (induktivitātē). Ja 5.4. attēlā parādītajā strāvas kontūrā plūst laikā mainīga strāva $i(t)$, arī tās radītā magnētiskā plūsma būs laika funkcija: $\Phi = \Phi(t)$. Izvēlēsimies kontūru Faradeja likumā (6.6) no p. a pa vadu līdz p. b (sarkanā svītrlīnija 5.4. att.), noslēdzot to «pa gaisu» no p. b uz p. a. Līnijas integrāli var sadalīt 2 daļās – «pa vadu» un «pa gaisu». Ja pieņemam, ka vada materiālam nepiemīt elektriskā pretestība, tad elektriskā lauka intensitāte tajā ir vienāda ar nulli.[1] Tad no visa noslēgtā integrēšanas kontūra atliek

$$\int_b^a \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

[1] Ja elektriskā pretestība ir vienāda ar nulli, tas nozīmē, ka tās apgrieztais lielums – īpatnējā vadītspēja γ – ir bezgalīgi liela. Strāva ar blīvumu $\boldsymbol{J}$ tādā vadā, protams, var plūst, taču no Oma likuma $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$ izriet, ka $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\gamma = 0$.

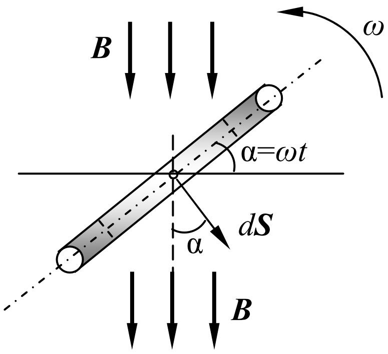
Saskaņā ar (1.5) šāds integrālis ir vienāds ar spriegumu u_{ba}. Tātad $u_{ba} = -d\Phi/dt$. Elektrisko ķēžu teorijā parasti interesējas par pretējā virziena spriegumu u_{ab}, kāds jāpieliek no ārēja avota, lai pārvarētu inducēto EDS un radītu 5.4. att. parādītā virziena strāvu. Tas, protams ir $+d\Phi/dt$.

Ja strāvas kontūra vietā ir spole, tad Φ vietā jālieto plūsmas saķēdējums $\Psi = Li$, kur L ir spoles induktivitāte. Ja L nav atkarīga no spolē plūstošās strāvas stipruma i (un laika t), to var iznest ārpus atvasinājuma, iegūstot šādu spoles sprieguma u_{L} izteiksmi:

$$u_{\mathrm{L}} = L\frac{di}{dt}.$$

Atgādināsim vēlreiz, ka «+» zīme šajā spoles sprieguma izteiksmē liekama tad, ja u_{L} un strāvas i virzieni izvēlēti sakrītoši (nu, piemēram, abi «no augšas uz leju» kādā konkrētā spolē, bet nevis tā, lai sprieguma virziens būtu strāvas virziena turpinājums noslēgtā kontūrā, kā tas bija ar spriegumu u_{ba} 5.4. attēlā). Tāpat jāatceras, ka šajā izteiksmē nav ievērota spoles vadu elektriskā pretestība.

Mijindukcijas gadījumā var iegūt līdzīgu izteiksmi: $u_M = \pm M di/dt$, kur u_M ir «otrajā» spolē inducētais spriegums, bet i – «pirmajā» spolē plūstošā strāva. Konkrētā zīme nosakāma atkarībā no magnētiskās plūsmas virziena un izvēlētā u_M virziena.



6.3. att. Ja spole rotē magnētiskajā laukā ar vienmērīgu leņķisko ātrumu ω, tajā inducējas laikā sinusoidāli mainīgs EDS.

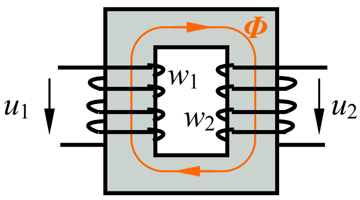
Elektriskā ģeneratora un transformatora darbības princips. 4. nodaļā jau aplūkojām elektriskā dzinēja (motora) darbības principu − uz kontūru, pa kuru plūst strāva, magnētiskajā laukā darbojas griezes moments. Elektriskās strāvas ģeneratorā izmanto pretējo efektu − griežot kontūru (spoli), kas atrodas magnētiskajā laukā, tajā inducējas EDS. Ja spoles ķēde ir noslēgta, plūst elektriskā strāva.

6.3. attēlā parādītais kontūrs (jeb spole ar vijumu skaitu w) rotē magnētiskajā laukā ar leņķisko ātrumu (frekvenci) ω. Spoles vienā vijumā inducētais EDS ir $-\partial\Phi/\partial t$, bet visā spolē $e = -w\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$, kur $\Psi = w\Phi$ ir magnētiskās plūsmas saķēdējums. Pieņemot, ka magnētiskais lauks ir homogēns ($\boldsymbol{B} = \mathrm{const}$), plūsma Φ nosakāma šādi:

$$\Phi(t) = \int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = \int_S BdS\cos\alpha = BS\cos\alpha = BS\cos\omega t.$$

(Šeit pieņemts, ka momentā $t = 0$ spole jeb kontūrs atradās horizontālā stāvoklī. Tad $\alpha = \omega t$.) Tātad iegūstam laikā sinusoidāli mainīgu EDS: $e = w\omega BS\sin\omega t$. Ja ārējā ķēde ir noslēgta, tajā plūdīs arī laikā sinusoidāli mainīga strāva.

Salīdzinoši vienkāršā maiņstrāvas ģenerēšana ir viens no iemesliem, kādēļ visās spēkstacijās ir uzstādīti maiņstrāvas ģeneratori un visas elektroapgādes sistēmas darbojas ar maiņstrāvu. Otrs iemesls ir tas, ka maiņstrāvas tīklos sprieguma paaugstināšanai vai pazemināšanai var izmantot transformatorus.



6.4. att. Transformatoru veido induktīvi saistītas spoles, novietotas uz kopējas noslēgtas feromagnētiska materiāla serdes.

Transformatoru veido induktīvi saistītas spoles, kas parasti novietotas uz kopējas noslēgtas feromagnētiska materiāla serdes (6.4. att.). Pirmajai spolei ar vijumu skaitu w_1 pieslēgtais maiņsprieguma avots u_1 rada strāvu pirmajā (primārajā) tinumā, bet tā − laikā mainīgu magnētisko plūsmu Φ. Mainīgā plūsma inducē spriegumu u_2 sekundārajā tinumā ar vijumu skaitu w_2. Feromagnētiskā materiāla serdei ir liela magnētiskā caurlaidība μ; tādēļ gandrīz visa primārā tinuma radītā magnētiskā plūsma nokļūst arī sekundārajā tinumā. Tādā gadījumā var uzskatīt, ka spriegumu attiecība u_1/u_2 ir vienāda ar vijumu skaitu attiecību w_1/w_2. Tādējādi var izveidot gan spriegumu paaugstinošu, gan pazeminošu transformatoru.

Enerģijas pārvades lietderības koeficients ir jo augstāks, jo lielāks ir pārvades līnijas spriegums; tādēļ spriegumu šādās līnijās paaugstina līdz 300; 500 kV un vairāk, bet pirms elektroenerģija nonāk līdz patērētājam, pārvades spriegums vairākās pakāpēs tiek samazināts līdz parastajiem 220 V. Konkrētās iekārtās (datorā, televizorā u.c.) vēl ir savs pazeminošs transformators. Izmantojot laikā nemainīgu strāvu − līdzstrāvu, līdzīga spriegumu pārveidošana ir daudz sarežģītāka.

6.3. Laikā mainīga elektriskā lauka ietekme uz magnētisko lauku.

Iepriekšējās sadaļās, pētot mainīga magnētiskā lauka ietekmi uz elektrisko lauku, no transformāciju (3.12') izteiksmes $\boldsymbol{E} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{B}$ ieguvām, ka laikā mainīgs magnētiskais lauks rada elektrisko lauku, tādu, kas apmierina izteiksmes (6.4) un (6.6). Saprotams, ka gadījumā, ja laikā mainās elektriskā lauka intensitāte, no otras transformāciju formulas $\boldsymbol{B} = -\mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o(\mathbf{v}\times\boldsymbol{E})$ iegūstams līdzīgs rezultāts, kuru varam uzrakstīt tūlīt, izmantojot abu formulu matemātisko analoģiju: l a i k ā m a i n ī g s e l e k t r i s k a i s l a u k s r a d a m a g n ē t i s k o l a u k u, tādu, ka

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (6.8)$$

jeb

$$\oint_l \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}. \qquad (6.9)$$

Šeit Φ_E ir elektriskā lauka intensitātes plūsma caur patvaļīgā noslēgtā kontūra l aptverto virsmu S: $\Phi_E = \int_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}$.

Integrāli pa patvaļīgu noslēgtu kontūru no skalārā reizinājuma $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{l}$ rakstījām jau agrāk (5.6); tas bija vienāds ar $\mu\mu_o i$, kur i bija kontūra aptvertā strāva. Vai tagad esam ieguvuši pretrunu? Nebūt nē! Gluži vienkārši, rakstot (5.6), mēs pieņēmām, ka vienīgais magnētiskā lauka avots ir strāva i, bet, iegūstot (6.8) un (6.9), uzskatījām, ka nekādas brīvo lādiņu plūsmas nav. Pretējā gadījumā transformāciju formulā būtu jāievēro arī šīs strāvas magnētiskais lauks.

Ja magnētisko lauku rada kā brīvo lādiņu plūsma (vadītspējas strāva i) tā arī mainīgs elektriskais lauks, tad pilnās strāvas likuma izteiksmē jāievēro abi šie faktori, iegūstot:

$$\oint_l \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu\mu_o i + \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}. \qquad (6.10)$$

Kā redzams, tad lielums

$$\varepsilon\varepsilon_o\partial\Phi_E/\partial t = i_n \qquad (6.11)$$

rada magnētisko lauku tāpat kā parastā vadītspējas strāva i. Tāpēc to sauc par *nobīdes strāvu*.

Šis nosaukums radies vēsturiski un tikai daļēji izsaka parādības būtību. Lielums $\varepsilon\varepsilon_o\Phi_E$ ir elektriskās indukcijas vektora $\boldsymbol{D}$ plūsma. Tā kā (1.11) $\boldsymbol{D} = \varepsilon_o\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$, tad $\partial\boldsymbol{D}/\partial t = \varepsilon_o\partial\boldsymbol{E}/\partial t+\partial\boldsymbol{P}/\partial t$. Otrais saskaitāmais šajā izteiksmē patiešām raksturo saistīto lādiņu kustību (nobīdi) mainīgā elektriskajā laukā un šo lādiņu kustībai jārada magnētiskais lauks tāpat kā vadītspējas elektronu kustībai parastajā elektriskajā strāvā. Taču pirmais saskaitāmais pastāv arī vakuumā un parāda, ka arī mainīgs elektriskais lauks rada magnētisko lauku līdzīgi lādiņu kustībai.

Vadītspējas un nobīdes strāvas summu

$$i + i_n = i_p$$

sauc par **pilno strāvu**. Tādēļ arī (6.10) sauc par **pilnās strāvas likumu**:

$$\oint_l \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu\mu_o i_p\,.$$

Līdzīgu izteiksmi var uzrakstīt arī magnētiskā lauka intensitātei $\boldsymbol{H}$. Tajā nav jāraksta koeficients $\mu\mu_o$, bet vidē, kas polarizējas, nobīdes strāvas izteiksmē jāsaglabā $\varepsilon\varepsilon_o$ jeb jālieto vektora $\boldsymbol{D}$ plūsma:

$$\oint_l \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = i + \frac{\partial\Phi_D}{\partial t}\,. \qquad (6.12)$$

Atšķirībā no Faradeja likuma (6.6) izteiksmei (6.12) analogas sakarības angļu fiziķis Maksvels ap 1870.g. uzrakstīja bez jebkāda eksperimentāla pamata. Var tikai apbrīnot zinātnieka intuīciju, jo viņa pieņēmums par nobīdes strāvas magnētiskā lauka eksistenci, kā mēs redzam tagad, ir pilnīgi pareizs. Eksperimentāli to pierāda, piemēram, elektromagnētisko viļņu rašanās un izplatīšanās, kas bez nobīdes strāvas magnētiskā lauka nebūtu iespējama.

6.4. Pilnās strāvas nepārtrauktības princips.

Elektriskā strāva i vienmēr izplūst caur galīga lieluma laukumu S; tādēļ to var uzrakstīt kā strāvas blīvuma vektora $\boldsymbol{J}$ plūsmu caur virsmu S:

$$i = \int_S \boldsymbol{J}d\boldsymbol{S}\,. \qquad (6.13)$$

Tā kā saskaņā ar (6.11) $i_n = \varepsilon\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}$, tad nobīdes strāvas blīvums ir

$$\boldsymbol{J}_n = \varepsilon\varepsilon_o\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\,,$$

bet pilnās strāvas blīvums $\boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_n$.

Nav grūti parādīt, ka pilnās strāvas blīvuma plūsma caur *noslēgtu* virsmu vienmēr ir vienāda ar nulli jeb, citiem vārdiem, ka pilnā strāva ir nepārtraukta − noslēgtā virsmā ieplūstošā un izplūstošā summārā pilnā strāva ir vienāda ar nulli.

$$\oint_S \boldsymbol{J}_p d\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{J}d\boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\oint_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S}\,. \quad (6.14)$$

Pirmais integrālis (6.14) izteiksmes labajā pusē ir vienāds ar no noslēgtās virsmas izplūstošo vadītspējas strāvu. Tas var nebūt vienāds ar nulli, ja virsmas aptvertajā telpas apgabalā mainās uzkrāto lādiņu daudzums. Tad šis integrālis ir vienāds ar $-\partial q/\partial t$. (Tā kā $d\boldsymbol{S}$ ir ārējās normāles virziens, tad summārā vadītspējas strāva ir pozitīva, samazinoties uzkrātajam lādiņam; tādēļ atvasinājuma priekšā jāliek mīnusa zīme.) Savukārt otrais integrālis atbilstoši Gausa teorēmai (5.2) ir vienāds ar virsmas ietverto lādiņu q, bet tā atvasinājums − ar $+\partial q/\partial t$. Tātad

$$\oint_S \boldsymbol{J}_p d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} \equiv 0\,.$$

Pilnā strāva vienmēr ir **nepārtraukta, noslēgta**.

Šis ir ļoti svarīgs secinājums. Līdz ar to pilnās strāvas likums (6.12)

$$\oint_l \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = i_p$$

kļūst par ļoti vispārīgu likumu, kas ir pareizs jebkurai reāli plūstošai strāvai, jo, ievērojot arī nobīdes strāvu, tā vienmēr ir noslēgta strāva.

Pilnas strāvas nepārtrauktību izmanto elektrisko ķēžu teorijā ļoti svarīgais Kirhofa 1. likums. Ja noslēgtas virsmas ierobežotā apgabalā strāva var ieplūst un izplūst tikai pa noteiktiem ceļiem − vadiem, tad integrālis pa noslēgto virsmu sadalās atsevišķos integrāļos pa vadu šķērsgriezumiem. Katrs no šiem integrāļiem vienāds ar vadā plūstošo strāvu i. Izplūstošai strāvai vektori $\boldsymbol{J}$ un $d\boldsymbol{S}$ veido šauru leņķi α, tāpēc $\boldsymbol{J}d\boldsymbol{S} = JdS\cos\alpha > 0$, kamēr ieplūstošai strāvai leņķis ir plats un $\cos\alpha < 0$. No šejienes izriet, ka noslēgtas virsmas ierobežotā apgabalā ieplūstošo strāvu algebriska summa ir vienāda ar nulli:

$$\Sigma\, i = 0.$$

Šajā izteiksmē apgabalā ieplūstošās strāvas jāraksta ar vienu zīmi (piemēram, «+»), bet izplūstošās − ar pretēju.

7. Maksvela vienādojumi un daži to risinājuma piemēri

7.1. Maksvela vienādojumu integrālā forma.

Iepriekšējā nodaļā redzējām, ka laikā mainīgs magnētiskais lauks rada elektrisko lauku, kurš, arī būdams laikā mainīgs, savukārt rada atkal mainīgu magnētisko lauku. Līdz ar to iepriekš iegūtās sakarības − pilnās strāvas likums un Faradeja elektromagnētiskās indukcijas likums jāapvieno vienā vienādojumu sistēmā. Šiem vienādojumiem vēl jāpievieno Gausa teorēma un magnētiskās plūsmas nepārtrauktības principa matemātiskā izteiksme. Iegūto vienādojumu sistēmu sauc par Maksvela vienādojumu sistēmu (integrālajā formā):

$$\begin{aligned} &\oint_l \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = i_{\text{p}}\,; \\ &\oint_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \\ &\oint_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = q; \\ &\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0. \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Iegūtos vienādojumus uzrakstītajā secībā sauksim par Maksvela pirmo, otro, trešo un ceturto vienādojumu. Tātad Maksvela pirmais vienādojums ir pilnās strāvas likums, otrais − Faradeja elektromagnētiskās indukcijas likums, trešais − Gausa teorēma, bet ceturtais − magnētiskās plūsmas nepārtrauktības princips. (Protams, ka tas, kādā secībā sakārto vienādojumus sistēmā, nav būtiski. Daudzās grāmatās par pirmo vienādojumu sauc elektromagnētiskās indukcijas likumu, bet par otro − pilnās strāvas likumu. Mēs izmantosim sistēmā (7.1) izvēlēto secību.)

Atgādināsim vēlreiz sakarības starp sistēmā (7.1) ietvertajiem lielumiem:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_o\boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{B} = \mu\mu_o\boldsymbol{H}; \qquad i_{\text{p}} = i + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} d\boldsymbol{S}\,; \qquad \Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}\,.$$

Kā redzams, tad sistēma (7.1) attiecībā pret lauka vektoriem $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{H}$ ir sarežģīta integrālvienādojumu sistēma un vispārīgā gadījumā grūti izmantojama aprēķiniem. Šos vienādojumus iespējams izmantot gandrīz tikai tad, ja tos var risināt neatkarīgi citu no cita un turklāt iespējams atrast tādus integrēšanas kontūrus vai virsmas, kuru visos punktos attiecīgais lauka vektors ir konstants. Mēs jau to izmantojām, aplūkojot cilindriska kondensatora elektrisko lauku un taisna vada magnētisko lauku (sk. **5.2** un **5.3**).

Aprēķiniem piemērotāka ir Maksvela vienādojumu *diferenciālā forma*, kura dod sakarības starp elektromagnētiskā lauka vektoriem katrā telpas punktā, nevis pa veselām virsmām vai kontūriem.

7.2. Maksvela vienādojumu diferenciālā forma.

Otro Maksvela vienādojumu diferenciālajā formā jau esam ieguvuši . Tā ir izteiksme (6.4)

$$\text{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (7.2)$$

kas dod sakarību starp inducētā elektriskā lauka intensitāti un mainīgo magnētiskā lauka indukcijas vektoru.

Salīdzinot izteiksmi (7.2) ar Maksvela otrā vienādojuma integrālo formu, redzams, ka, pārejot uz vienādojuma diferenciālo formu, vektora līnijas integrālis pa noslēgtu kontūru (matemātikā to sauc arī par *vektora cirkulāciju*) pārveidojas par rotoru, bet vienādojuma labajā pusē vektora plūsmas vietā jāraksta plūsmas blīvums (otrajā vienādojumā tas ir vektors $\boldsymbol{B}$). Tāpēc bez grūtībām varam uzrakstīt arī pirmo vienādojumu diferenciālajā formā:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

kur $\boldsymbol{J}$ ir vadītspējas, bet $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ − nobīdes strāvas blīvums.

Maksvela trešajā un ceturtajā vienādojumā, pārejot uz diferenciālo formu, vektora plūsma caur noslēgtu virsmu pārveidojas par vektora diverģenci, bet trešā vienādojuma labajā pusē lādiņa $q = \int_V \rho dV$ vietā jāliek lādiņu telpiskais blīvums ρ. (Iztiksim bez šī apgalvojuma stingra pierādījuma.) Tātad trešais vienādojums ir šāds:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho,$$

bet ceturtais −

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Maksvela vienādojumu sistēma diferenciālajā formā ir šāda:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}; \\ &\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \\ &\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho; \\ &\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

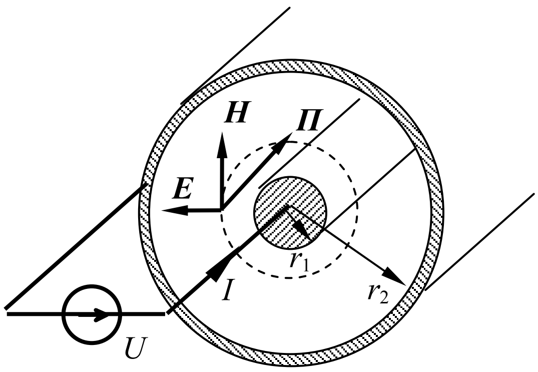
Maksvela vienādojumiem ir izcila teorētiska un praktiska nozīme. Ar to palīdzību var pētīt elektromagnētiskos procesus dažādās elektrotehniskās iekārtās, uzlabot to darbību un radīt jaunas iekārtas. Maksvela vienādojumu pielietojamība apstājas pie kvantu fizikas robežas, taču arī pati kvantu elektrodinamika varēja rasties, lielā mērā pateicoties šiem vienādojumiem; tāpat arī relativitātes teorija, jo, paredzot nobīdes strāvas magnētiskā lauka eksistenci, Dž. K. Maksvels šo teoriju jau bija atminējis, kaut arī tā tika galīgi formulēta apmēram gadsimta ceturksni vēlāk.

7.3. Enerģijas pārvade elektromagnētiskajā laukā.

Pirms aplūkosim dažus vienkāršākos Maksvela vienādojumu atrisinājumus, jāparunā par enerģijas pārvadi elektromagnētiskajā laukā.

Enerģijas pārvadi raksturo Pointinga vektors $\boldsymbol{\Pi}$ − elektriskā un magnētiskā lauka intensitātes vektoriālais reizinājums:

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}. \tag{7.4}$$



7.1. att. Telpā starp koaksiāla kabeļa vadiem $\boldsymbol{E}$ vektors vērsts radiālā virzienā, $\boldsymbol{H}$ − pa koncentriska riņka pieskari, bet $\boldsymbol{\Pi}$ − aksiālā virzienā.

Šī lieluma saistība ar enerģiju redzama jau no mērvienībām: E vienība ir V/m, bet H − A/m, tātad Π mērāms vienībās VA/m^2. Sprieguma (V) un strāvas (A) reizinājums ir vienāds ar elektrisko jaudu − enerģiju laika vienībā, tātad Π lielums vienāds ar enerģiju laika vienībā, attiecinātu uz laukuma vienību, bet Pointinga vektora plūsma caur kādu virsmu S − ar enerģijas daudzumu, kāds laika vienībā iziet caur šo virsmu.

Protams, ka šos spriedumus nevar uzskatīt par pēdējā apgalvojuma stingru pierādījumu, taču apgalvojums ir pareizs. Lai par to pārliecinātos, aplūkosim koaksiālu kabeli, pa kura vadiem (t.i., centrālo vadu un apvalku) plūst strāva I, ja starp tiem pieslēgts sprieguma avots U (7.1. att.). Noteiksim Pointinga vektora plūsmu $P = \int_S \Pi dS$ caur gredzenveida virsmu starp abiem vadiem, kuras iekšējais rādiuss ir centrālā vada rādiuss r_1, bet ārējais, r_2, sakrīt ar apvalka iekšējo rādiusu (7.1. attēlā neiesvītrotais laukums).

Ja pieņemam, ka vadiem nepiemīt elektriskā pretestība, tad spriegums starp vadiem paliek vienāds ar avota spriegumu U visā kabeļa garumā. Tad vektoram $\boldsymbol{E}$ var izmantot bezgalīgi gara vada elektriskā lauka intensitātes izteiksmi (5.3). Atceroties arī koaksiāla kabeļa kapacitātes izteiksmi (5.5), iegūstam

$$E = E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Elektriskā lauka intensitāte vērsta radiālā virzienā no centrālā vada uz apvalku, ja centrālajam vadam pieslēgta avota pozitīvā spaile.

Magnētiskā lauka intensitāte vērsta vadam koncentriska riņķa pieskares virzienā (cilindriskajā koordinātu sistēmā tai ir tikai komponente H_α). Tā nosakāma no (5.8):

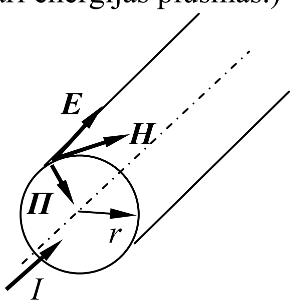
$$H = H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}.$$

Tātad vektori $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{H}$ ir savstarpēji perpendikulāri.

Tad Pointinga vektoram ir komponente tikai aksiālā virzienā $\Pi = \Pi_z = E_r H_\alpha$. Tās virziens sakrīt ar strāvas virzienu tajā vadā, kuram pieslēgta avota pozitīvā spaile, t.i., centrālajā vadā. Līdz ar to vektors $\boldsymbol{\Pi}$ ir paralēls virsmas elementa vektoram $d\boldsymbol{S}$ un vektoru zīmes, nosakot virsmas integrāli, var atmest. Ievērojot, ka virsmas elements polārajā koordinātu sistēmā ir $dS = rdrd\alpha$, iegūstam:

$$P = \int_S \boldsymbol{\Pi} d\boldsymbol{S} = \int_S \Pi dS = \int_S E_r H_\alpha dS = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{rdr}{r^2} = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot 2\pi \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = UI.$$

Kā redzams, tad Pointinga vektora plūsmas izteiksmē, kas noteikta pa kabeļa šķērsgriezuma laukumu, neietverot tajā vadus, patiešām ir vienāda ar avota attīstīto jaudu, kuru visu (gadījumā, kad vadiem nav elektriskās pretestības) saņem arī kabelim pieslēgtais patērētājs. No šejienes jāsecina, ka elektriskā enerģija neizplatās «pa vadiem», bet gan elektromagnētiskajā laukā vadu apkārtnē. (Mūsu piemērā, kā zināms, ārpus kabeļa nav ne elektriskā, ne magnētiskā lauka un tātad nav arī enerģijas plūsmas.)



7.2. att. Enerģija, kas no apkārtējā elektromagnētiskā lauka ieplūst vadā, tiek patērēta vada silšanai.

Lai šo secinājumu vēl vairāk pamatotu, aplūkosim, kas notiek, ja strāva I plūst pa vadu, kuram piemīt galīga lieluma elektriskā vadītspēja γ (7.2. att.). Noteiksim Pointinga vektora plūsmu caur vada sānu virsmu ar garumu l.

Elektriskā lauka intensitāti ar strāvas blīvumu vadītājā saista Oma likums diferenciālajā formā:

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} \qquad \text{jeb} \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\gamma. \qquad (7.5)$$

Līdz ar to $\boldsymbol{E}$ vektors vadā vērsts strāvas plūšanas virzienā un tāds tas ir arī uz vada virsmas ($\boldsymbol{E}$ tangenciālā komponente, kā zināms no (1.18'), nemainās ar lēcienu). Ja strāvas blīvums ir vienāds visā vada šķērsgriezumā, tad

$$E = \frac{I}{\pi r^2 \gamma},$$

kur r ir vada rādiuss.

Magnētiskā lauka intensitāte uz vada virsmas nosakāma tāpat kā iepriekšējā piemērā:

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Tā vērsta virsmas pieskares virzienā. Līdz ar to Pointinga vektors vērsts radiāli vadā iekšā. Pointinga vektoram nav komponentes strāvas plūšanas virzienā. Tā kā vektori $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{H}$ ir savstarpēji perpendikulāri, tad

$$\Pi = EH = \frac{I^2}{2\pi^2 r^3 \gamma}.$$

Uz vada virsmas šis lielums ir nemainīgs, jo tur r = const. Tad

$$P = \int_S \Pi dS = \frac{I^2}{2\pi^2 r^3 \gamma} \int_S dS = \frac{l}{\pi r^2 \gamma} \cdot I^2,$$

jo integrālis pēdējā izteiksmē ir vienāds ar cilindra sānu virsmas laukumu $2\pi r l$.

Koeficients strāvas kvadrāta priekšā ir vienāds ar taisna vada pretestību R: l ir vada garums, πr^2 − tā šķērsgriezuma laukums, bet $1/\gamma$ − īpatnējā pretestība ($R = l/\gamma S$). Tātad $P = I^2 R$; tā enerģija, kas no apkārtējā elektromagnētiskā lauka nonāk vadā, tiek patērēta vada silšanai, bet nevis pārvadīta no enerģijas avota uz patērētāju. Šis rezultāts vēlreiz apstiprina izdarīto secinājumu par enerģijas izplatīšanos telpā vadu apkārtnē.

Tātad jebkādai elektriskās enerģijas pārvadei nepieciešama kā elektriskā tā magnētiskā lauka klātbūtne. Lai divvadu līnijā rastos enerģijas plūsma aksiālajā, t.i., vadu virzienā, elektriskā lauka intensitātei jābūt radiālajai komponentei. Tāda rodas, ja ir divi vadi, starp kuriem pastāv spriegums. Lai rastos magnētiskais lauks, vados jāplūst strāvai. Vadi tikai piešķir enerģijas plūsmai virzienu (un diemžēl rada arī nelietderīgus enerģijas zudumus vadu silšanai).

Ja elektriskais un magnētiskais lauks ļoti ātri mainās laikā, rodas liels nobīdes strāvas blīvums $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$, kas rada pietiekami stipru mainīgu magnētisko lauku un spēj uzturēt enerģijas izplatīšanos arī bez vadu palīdzības. Tā izplatās elektromagnētiskie viļņi.

7.4. Maksvela vienādojumu kopēja risināšana. Viļņu un siltumvadāmības vienādojums.

Mainīgā elektromagnētiskajā laukā Maksvela vienādojumi jārisina kā vienādojumu sistēma, − jācenšas iegūt vienu vienādojumu ar vienu nezināmo lielumu, kuru pēc tam var atrisināt.

Lai izslēgtu no vienādojumiem magnētiskā lauka vektorus, pielietosim operāciju rot otrajam no vienādojumiem (7.3). To var darīt, jo kā rot$\boldsymbol{E}$ tā $\boldsymbol{B}$ šajā vienādojumā ir vektori un operācija rot tiem ir definēta. Tad, ievērojot vēl, ka $\boldsymbol{B} = \mu\mu_o \boldsymbol{H}$, iegūstam

$$\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E} = -\mu\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}.$$

Ievietojot šeit rot$\boldsymbol{H}$ izteiksmi no Maksvela pirmā vienādojuma, iegūstam vienādojumu ar vienu nezināmo lauka vektoru $\boldsymbol{E}$:

$$\text{rotrot}\boldsymbol{E} = -\mu\mu_o\gamma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (7.6)$$

(Ievērots Oma likums (7.5) $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$.)

Vienādojums (7.6) ir pietiekoši sarežģīts, tādēļ to cenšas risināt speciāliem gadījumiem, kad tas vienkāršojas. Vispirms izmantosim matemātisku identitāti, kas ir pareiza jebkuram vektoru laukam $\boldsymbol{F}$:

$$\text{rotrot}\boldsymbol{F} = \text{graddiv}\boldsymbol{F} - \text{divgrad}\boldsymbol{F} = \text{graddiv}\boldsymbol{F} - \nabla^2\boldsymbol{F},$$

kur ∇^2 ir jau 1. nodaļā lietotais Laplasa operators, tikai šeit tas izmantots vektoriālai funkcijai.

Ja turpmāk aplūkojam tikai gadījumus, kad div$\boldsymbol{E}$ = 0 (t.i., telpā nav izkliedētu lādiņu, $\rho = 0$), tad (7.6) vienkāršojas:

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\mu_o\gamma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (7.7)$$

Arī šo vienādojumu cenšas vienkāršot tālāk. Aplūkojot lauku dielektriskā vidē, kur $\gamma = 0$, iegūst

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (7.8)$$

Vienādojumu (7.2) sauc par viļņu vienādojumu. Tas, kā redzēsim turpmāk (sk. **7.5**), apraksta viļņu izplatīšanos telpā.

Vadošā vidē ar lielu īpatnējo vadītspēju γ pirmais saskaitāmais (7.7) vienādojuma labajā pusē parasti ir daudz lielāks par otro saskaitāmo. Tādēļ šo otro saskaitāmo atmet un risina vienādojumu

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\mu_o\gamma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (7.9)$$

Šo vienādojumu sauc par siltumvadāmības vienādojumu, jo matemātiski tādam pašam vienādojumam pakļaujas arī siltuma izplatīšanās telpā. Arī (7.9) apraksta viļņu izplatīšanos, taču atšķirībā no (7.8) vienādojuma atrisinājumiem šiem viļņiem to izplatīšanās virzienā krasi samazinās amplitūda (sk. **7.6**).

Pielietojot operāciju rot pirmajam Maksvela vienādojumam, līdzīgā veidā iespējams no pirmā un otrā vienādojuma izslēgt elektriskā lauka intensitāti $\boldsymbol{E}$. Tad magnētiskā lauka intensitātei $\boldsymbol{H}$ var iegūt pilnīgi tādus pašus vienādojumus (7.6) − (7.9). Iesakām lasītājam par to pārliecināties pašam.

7.5. Plakans vilnis dielektriskā vidē.

Visi iepriekšējā sadaļā iegūtie vienādojumi (7.6) − (7.9) ir parciālie diferenciālvienādojumi. Lai iegūtu kādu konkrētu atrisinājumu, jābūt zināmam, kas rada lauku. Matemātiski to var uzdot ar robežnoteikumiem uz apskatāmā telpas apgabala robežvirsmām.

Aplūkosim gadījumu, kad dielektriskā vidē x,z plaknes visos punktos tiek uzturēta laikā t vienādi mainīga elektriskā lauka intensitāte $E = E_z = E_m \sin\omega t$ ar zināmu leņķisko frekvenci ω un amplitūdu E_m.

Tā kā robežnoteikumā $E = E_z$, tad sagaidāms, ka arī citur telpā neradīsies vektora E citas komponentes. Tāpēc no vienādojuma (7.8) atliek viens skalārs vienādojums komponentei E_z:

$$\nabla^2 E_z = \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \qquad (7.10)$$

Dekarta koordinātu sistēmā konstantos vienības vektorus $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{y}^0$, $\boldsymbol{z}^0$ var iznest no Laplasa operatora un iegūt skalārus vienādojumus katrai komponentei. Lasītājs tomēr jābrīdina, ka citās koordinātu sistēmās vienības vektoru virzieni var būt mainīgi, pārejot no viena telpas punkta uz citu; garums, protams nemainās, bet var mainīties virziens. Tādus vienības vektorus nevar vienkārši iznest no operatora ∇^2. Tādēļ citās koordinātu sistēmās vektoriālas funkcijas Laplasa operatora sadalīšana komponentēs ir sarežģītāka.

Tā kā robežnoteikumā E_z nav atkarīga no x un z, tad sagaidāms, ka no x un z nebūs atkarīgs arī atrisinājums. Tad (7.10) vienkāršojas tālāk:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \qquad (7.11)$$

Parādīsim, ka doto robežnoteikumu gadījumā vienādojumu (7.11) apmierina funkcija

$$E_z(y,t) = E_m \sin(\omega t - \beta y) \qquad (7.12)$$

un noteiksim koeficientu β. Šajā nolūkā jāatrod sagaidāmā atrisinājuma (7.12) otrās kārtas atvasinājumi pēc y un t, jāievieto tie vienādojumā (7.11) un jāatrod, kādam jābūt koeficientam β, lai izveidotos identitāte.

Pirmās kārtas atvasinājumi ir šādi:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\beta E_m \cos(\omega t - \beta y);$$

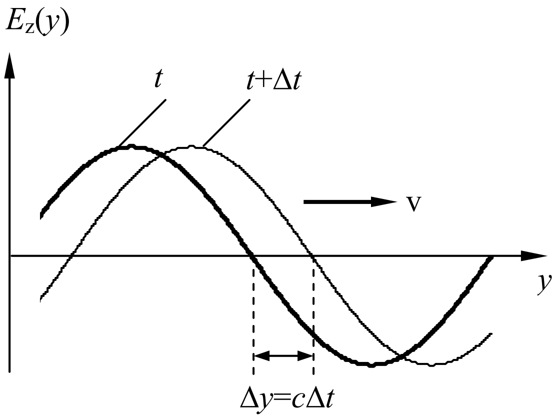
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \omega E_m \cos(\omega t - \beta y).$$

Otrās kārtas atvasinājumi:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\beta^2 E_m \sin(\omega t - \beta y);$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \sin(\omega t - \beta y).$$

Ievietojot tos vienādojumā (7.11) redzam, ka patiešām izveidojas identitāte, ja $\beta^2 = \omega^2\mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o$, t.i., $\beta = \omega\sqrt{\mu\mu_o\varepsilon\varepsilon_o}$.



7.3. att. Funkcija $\sin(\omega t-\beta y)$ veido skrejošo vilni, kas ar ātrumu v=ω/β izplatās y-ass pozitīvajā virzienā.

Vidē, kurā $\mu = \varepsilon = 1$ (vakuumā, gaisā), $\beta = \omega/c$, kur c ir gaismas ātrums vakuumā. (Atcerēsimies, ka 3. nodaļā definējām magnētisko konstanti $\mu_o = 1/\varepsilon_o c^2$. Tātad $c = 1/\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}$.) Citā vidē tāpat β = ω/v, kur v ir gaismas ātrums konkrētajā vielā.

Laika momentā $t+\Delta t$ sinusa funkcijas argumentu iegūtajā atrisinājumā var pārveidot šādi (vakuumā vai gaisā):

$$\sin[\omega(t+\Delta t) - \omega y/c] = \sin[\omega t - (y - c\Delta t)\,\omega/c] = \sin[\omega t - (y - \Delta y)\,\omega/c],$$

kur apzīmēts $\Delta y = c\Delta t$.

No šejienes redzams, ka momentā $t + \Delta t$ funkcijas $E_z(y)$ līkne ir pilnīgi tāda pati kā momentā t, tikai tā pavirzījusies attālumā $\Delta y = c\Delta t$ y-ass pozitīvajā virzienā. Pārvietošanās ātrums ir c (7.3. att.).

Laikā mainīgais elektriskais lauks bez šaubām rada arī magnētisko lauku ar intensitāti $\boldsymbol{H}$. Noteiksim arī to, izmantojot Maksvela otro vienādojumu (7.2):

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_o}\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\,.$$

Tagad, kad vektors $\boldsymbol{E}$ ir noteikts, var atrast vektoru rot$\boldsymbol{E}$. Dekarta koordinātu sistēmā to visērtāk izdarīt, izmantojot simbolisku determinantu un ievērojot tajā, ka mūsu gadījumā $E_x = E_y = 0$ un tāpat ar nulli ir vienādi atvasinājumi pēc x un z, jo E_z atkarīga tikai no y.

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}^o & \boldsymbol{y}^o & \boldsymbol{z}^o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}^o & \boldsymbol{y}^o & \boldsymbol{z}^o \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{x}^o\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\boldsymbol{x}^o\beta E_m\cos(\omega t - \beta y)\,.$$

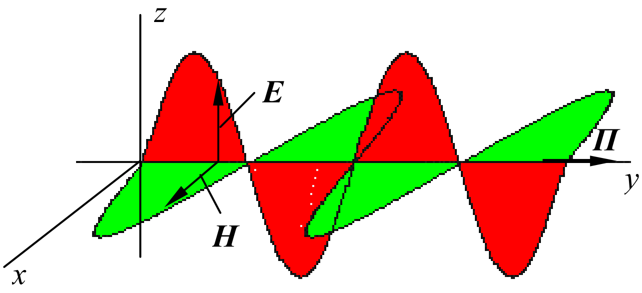
Tātad

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \boldsymbol{x}^o\frac{\beta}{\mu\mu_o}E_m\cos(\omega t - \beta y)\,.$$

Kā redzams, tad mūsu gadījumā (kad $E = E_z$) vektoram $\boldsymbol{H}$ ir tikai x-komponente: $H = H_x$, kuru var noteikt, integrējot pēdējo izteiksmi pēc t.

$$H_x = \frac{\beta}{\omega\mu\mu_o}E_m\sin(\omega t - \beta y) = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_o}{\mu\mu_o}}E_m\sin(\omega t - \beta y)\,. \qquad (7.13)$$

Arī magnētiskā lauka intensitāte izplatās telpā skrejošā viļņa veidā, turklāt, kā mēdz teikt, tā «sakrīt fāzē» ar elektriskā lauka intensitāti − sinusa funkcijas argumenti kā E_z tā H_x izteiksmē ir vienādi. Elektriskais un magnētiskais lauks kādā telpas punktā vienlaicīgi sasniedz maksimālo vērtību, vienlaicīgi iet caur nulli utt. Vektori $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{H}$ jebkurā telpas punktā ir savstarpēji perpendikulāri un to savstarpējā orientācija ir tāda, ka Pointinga vektors vērsts viļņa izplatīšanās virzienā. Simboliski tas parādīts 7.4. attēlā.



7.4. att. Elektromagnētiskajā vilnī vektori $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{H}$ ir savstarpēji perpendikulāri. Pointinga vektora (enerģijas plūsmas) virziens sakrīt ar viļņu izplatīšanās virzienu.

Tādu vilni, kurā visos telpas punktos vektori $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{H}$ ir paralēli vienai un tai pašai plaknei (mūsu gadījumā − x,z plaknei) sauc par **plakanu vilni**. Kā redzams no iegūtā atrisinājuma (7.12) un (7.13), tad plakans elektromagnētiskais vilnis dielektriskā vidē izplatās ar nemainīgām E un H amplitūdām. Šāds secinājums varētu izraisīt iebildumus, jo ir ļoti labi zināms, ka, izplatoties lielos attālumos, viļņa intensitāte pavājinās. Tas izskaidrojams tā, ka elektromagnētisko vilni var uzskatīt par plakanu vilni tikai ierobežotā telpas apgabalā. Īstenībā pietiekami tālu no elektromagnētisko viļņu izstarotāja izveidojas sfērisks vilnis, kurā Pointinga vektors vērsts radiālā virzienā no sfēras, kuras centrā atrodas izstarotājs. Palielinoties sfēras rādiusam, viļņa nestā enerģija izkliedējas arvien lielākā telpas apgabalā, kas izraisa intensitātes samazināšanos. Elektromagnētiskā viļņa intensitāte samazinās arī tad, ja vide nav ideāli dielektriska (gaisa mitruma vai citu iemeslu dēļ). Par šo efektu runāsim nākošajā sadaļā.

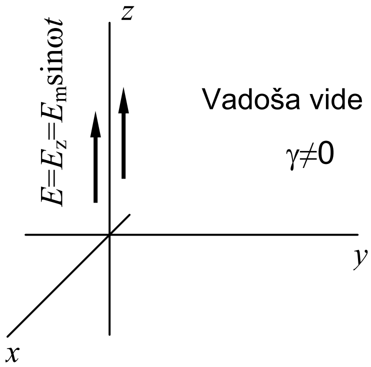
Noslēdzot šo sadaļu, atzīmēsim, ka iegūtais atrisinājums (7.12) un (7.13) izvēlēto robežnoteikumu gadījumā nebūt nav vienīgais iespējamais. Ja patiešām uz visas bezgalīgās x,z plaknes izdotos uzturēt visos punktos vienādu sinusoidāli mainīgu elektriskā lauka intensitāti, tad šī plakne darbotos kā izstarotājs, bet viļņi izplatītos uz abām pusēm no tās. Var pārliecināties, ka šajos apstākļos vienādojumam (7.11) ir arī atrisinājums $E = E_z(y,t) = E_m\sin(\omega t+\beta y)$, kas veido vilni, kurš izplatās pretēji y-ass pozitīvajam virzienam.

7.6. Plakans vilnis vadošā vidē. Virsmas efekts

Tagad aplūkosim gadījumu, kad x,z plakne ir robežvirsma starp vadošu ($\gamma \neq 0$) un dielektrisku vidi (7.5. att.). Uz šīs plaknes tāpat kā iepriekšējā sadaļā tiek uzturēta visos punktos vienāda, laikā sinusoidāli mainīga elektriskā lauka intensitāte $E = E_z = E_m\sin\omega t$. Noteiksim elektriskā un magnētiskā lauka intensitāti vadošajā vidē.

Vadošā vidē jārisina siltumvadāmības vienādojums (7.9), kurš mūsu gadījumā vienkāršojas līdzīgi kā iepriekšējā sadaļā:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \mu\mu_0\gamma\frac{\partial E_z}{\partial t}. \qquad (7.14)$$



7.5. att. Uz x,z plaknes tiek uzturēta laikā sinusoidāli mainīga elektriskā lauka intensitāte. Kā izplatīsies viļņi vadošā vidē?

Atrisinājumu meklēsim veidā

$$E_z(y,t) = E_m e^{-\alpha y}\sin(\omega t-\beta y). \qquad (7.15)$$

Šeit e ir naturālo logaritmu bāze, bet koeficienti α un β jānosaka risinājuma gaitā. Amplitūdu E_m un leņķisko frekvenci ω uzskatīsim par zināmiem lielumiem.

Jārīkojas līdzīgi kā iepriekšējā sadaļā − jāatrod pieņemtā atrisinājuma (7.15) pirmās kārtas atvasinājums pēc laika, otrās kārtas atvasinājums pēc y, jāievieto tie vienādojumā (7.18) un jāpārliecinās, ka ir iespējams izvēlēties tādus koeficientus α un β, lai izveidotos identitāte.*

Nosakām vajadzīgos atvasinājumus:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \omega E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y);$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\alpha E_m e^{-\alpha y}\sin(\omega t-\beta y) - \beta E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y);$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \alpha^2 E_m e^{-\alpha y}\sin(\omega t-\beta y) + \alpha\beta E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y)+$$

* Šeit piedāvātais risinājuma veids nav uzskatāms par racionālu − laikā sinusoidāli mainīgu procesu parasti risina, izmantojot kompleksos skaitļus. Tad risinājums ir daudz īsāks un vienkāršāks. Autors tomēr nevēlas to šeit darīt, jo tas prasītu no lasītāja pietiekamas priekšzināšanas par kompleksajiem skaitļiem. Ar komplekso skaitļu metodi EEF studenti iepazīsies turpmākajos mācību priekšmetos.

$$+\alpha\beta\, E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y) - \beta^2 E_m e^{-\alpha y}\sin(\omega t-\beta y) =$$
$$=(\alpha^2-\beta^2)E_m e^{-\alpha y}\sin(\omega t-\beta y) + 2\alpha\beta\, E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y).$$

Ievietojot vienādojumā (7.18):

$$(\alpha^2-\beta^2)E_m e^{-\alpha y}\sin(\omega t-\beta y) + 2\alpha\beta E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y) = \omega\mu\mu_o\gamma E_m e^{-\alpha y}\cos(\omega t-\beta y).$$

Iegūtās vienādības labajā pusē sinusa funkcijas nav. Tātad tā nedrīkst būt arī kreisajā pusē. Tādēļ jābūt

$$\alpha = \beta.$$

Pielīdzinot kosinusa funkcijas koeficientus kreisajā un labajā pusē, iegūstam $2\alpha^2 = \omega\mu\mu_o\gamma$ jeb

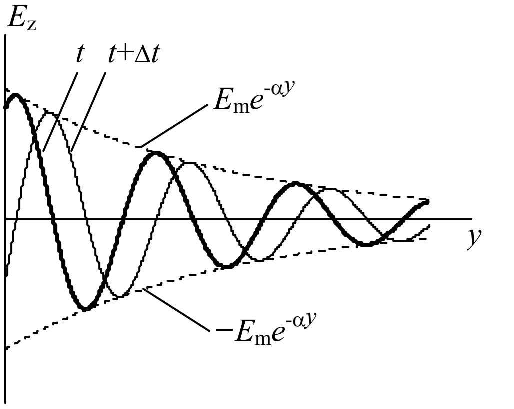
$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_o\gamma}{2}}\,. \qquad (7.16)$$

Tātad pieņemtais atrisinājums (7.15) apmierina vienādojumu (7.14) un koeficienti α un β ir atrasti.

Funkcija $\sin(\omega t-\beta y)$ atrisinājumā (7.15) veido skrejošo vilni, kas izplatās y-ass pozitīvajā virzienā tāpat kā dielektriskā vidē, taču reizinātājs $e^{-\alpha y}$ rāda, ka viļņa amplitūda samazinās tā izplatīšanās virzienā (7.6. att.). Attālumu y_0, kurā viļņa amplitūda samazinās e=2,718..., reizes nosacīti sauc par viļņa iespiešanās dziļumu. Tas nosakāms no sakarības $\alpha y_0 = 1$. Tātad

$$y_0 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_o\gamma}}\,. \qquad (7.17)$$

(Teorētiski vilnis iekļūst vadošā materiālā neierobežoti dziļi, taču tā amplitūda tālu no virsmas ir niecīga.)



7.6. att. Izplatoties vadošā vidē, elektromagnētiskā viļņa amplitūda krasi samazinās tā izplatīšanās virzienā. Vislielākā intensitāte ir uz vadošā materiāla virsmas. Šo parādību sauc par virsmas efektu.

Tā kā strāvas blīvumu ar elektriskā lauka intensitāti saista Oma likums $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$, tad laikā mainīga strāva (maiņstrāva) plūst galvenokārt vadītāja virsmas tuvumā, bet dziļumā strāvas blīvums ir niecīgs. Šo parādību sauc par virsmas efektu (skinefektu).

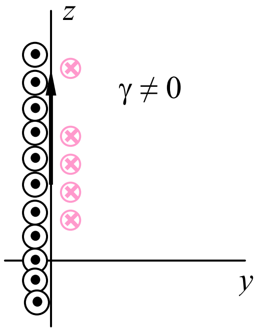
Virsmas efekts novērojams jebkurā vadā, pa kuru plūst maiņstrāva. (Tas vēlreiz apstiprina 7.3. sadaļā izdarītos secinājumus, ka enerģija un elektromagnētiskais lauks vadā iekļūst no apkārtējās telpas.) Tādēļ nav nekādas nozīmes izmantot vadus, kuru diametrs vairākkārt pārsniedz viļņu iespiešanās dziļumu. Vada iekšējie slāņi tik un tā paliks neizmantoti. (Apaļā vadā elektriskā lauka sadalījuma matemātiskā izteiksme, protams, ir citāda, taču aptuvenam novērtējumam var lietot izteiksmi (7.17), kuru ieguvām plakanas vadītāja virsmas gadījumam.)

Kā redzams no (7.17), tad viļņu iespiešanās dziļums ir atkarīgs no maiņstrāvas frekvences ω, kā arī no materiāla īpašībām − no īpatnējās vadītspējas γ un magnētiskās caurlaidības μ. Vara vadam ($\mu = 1$, $\gamma \approx 6\cdot10^7$ 1/(Ωm)) maiņstrāvai ar frekvenci f = 50 Hz ($\omega = 2\pi f$ = 314 rad/s) viļņu iespiešanās dziļums ir aptuveni 9 mm. Enerģētikā virsmas efekts ir nevēlama parādība. Bieži viena resna vada vietā jālieto vairāki paralēli vadi, bet arī tādā gadījumā jārēķinās ar virsmas efektam līdzīgu parādību − t.s. *tuvuma efektu*, t.i., ka elektriskais lauks un strāvas blīvums tiks izspiests no paralēlo vadu tuvākajām, iekšējām malām uz ārējām.

Līdzīgi kā to darījām iepriekšējā sadaļā, aplūkojot mainīgu lauku dielektriskā vidē, var iegūt arī magnētiskā lauka intensitāti vadošā materiālā, uz kura virsmas tiek uzturēts laikā mainīgs elektriskais lauks. Tāpat kā dielektriskajā vidē, arī vadītājā ***H*** vektors ir perpendikulārs vektoram ***E***. Arī magnētiskais lauks ir pakļauts virsmas efektam, − tā intensitātes amplitūda samazinās vadītāja dziļumā tāpat kā elektriskajam laukam.

Aplūkosim vēl gadījumu, kad uz vadošā materiāla virsmas tiek uzturēta nevis elektriskā lauka intensitāte kā iepriekšējos gadījumos, bet laikā mainīgs magnētiskais lauks ar intensitāti $H = H_z = H_m \sin\omega t$. To varētu izdarīt, piemēram, noklājot vadītāja virsmu ar tievu vadu slāni, pa kuriem plūst laikā sinusoidāli mainīga strāva (7.7. att.).

Kā jau minējām 7.4. sadaļā, tad vektors ***H*** apmierina tos pašus vienādojums, ko vektors ***E***. Tādēļ, risinot siltumvadāmības vienādojumu (7.9) magnētiskā lauka intensitātei dotajos apstākļos, iegūsim to pašu atrisinājumu (7.15), ko iepriekš ieguvām vektoram ***E***:



7.7. att. Laikā mainīgs magnētiskais lauks vadošā materiālā koncentrējas galvenokārt tā virsmas slāņos un izraisa virpuļstrāvu rašanos.

$$H = H_z = H_m e^{-\alpha y} \sin(\omega t - \beta y), \qquad (7.18)$$

kur tāpat kā iepriekš

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_o \gamma}{2}}.$$

Reizinātājs $e^{-\alpha y}$ rāda, ka arī šajā gadījumā izpaužas virsmas efekts. Tā, piemēram, ja spolē ievietota vadoša materiāla serde, tās centrālā daļa paliks neizmantota, magnētiskais tur būs ievērojami vājināts.

Kā redzams no izteiksmes (7.18), tad rot***H*** = ***J*** ≠ 0. Tas nozīmē, ka vadošajā materiālā plūdīs arī strāvas, kaut gan tam nekāds cits elektriskās enerģijas avots nav pieslēgts. Vadošā materiālā mainīgā magnētiskā lauka ietekmē inducētās strāvas sauc par virpuļstrāvām (arī par Fuko strāvām). Mūsu aplūkotajā gadījumā, kad vadošais materiāls aizņem visu pustelpu $y > 0$, inducētās strāvas plūst paralēli x-asij (t.i., perpendikulāri 7.7. attēla plaknei), taču ierobežotā apgabalā tās veido noslēgtus kontūrus. Atbilstoši Lenca principam virpuļstrāvu virziens ir tāds, ka tās cenšas kavēt ārējā magnētiskā lauka maiņu laikā, kas tad arī ir virsmas efekta rašanās fiziskais cēlonis.

Elektrotehniskajās iekārtās virpuļstrāvu rašanās pavājina magnētisko lauku un izraisa enerģijas zudumus serdes materiāla silšanai. Lai samazinātu virpuļstrāvas, maiņstrāvas spoļu serdes nekad neizgatavo no vienlaidus materiāla, bet gan saliek no savstarpēji izolētām elektrotehniskā tērauda plāksnītēm. Tas ievērojami palielina serdes pretestību virpuļstrāvām un samazina zudumus.

Augstu frekvenču gadījumā viļņu iespiešanās dziļums krasi samazinās. To izmanto praktiski, piemēram, zobratu virsmas rūdīšanai. Ievietojot sagatavi pietiekami spēcīgā augstfrekvences laukā, strāva plūst tikai pa virskārtu un sakarsē to līdz rūdīšanai nepieciešamajai temperatūrai. Materiālu strauji atdzesējot, tā dziļākie slāņi paliek nenorūdīti un līdz ar mazāk trausli.

Plāns vadoša materiāla ekrāns praktiski nelaiž cauri augstfrekvences lauku. Tādēļ, piemēram, koaksiāls kabelis, kura apvalks kalpo kā ekrāns, ir samērā nejūtīgs pret ārēju augstfrekvences signālu traucējumiem.

– *** –